Cognome: _____

Nome: _____

Data: _____

Dichiarazione

Dichiaro che lo svolgimento di questo homework è frutto del mio lavoro.

Indicazioni

Questo documento va stampato per intero; le risposte si scrivono a mano nello spazio sotto ogni domanda, contrassegnato dal numero della domanda, senza superarlo. Le formule principali, o quelle che si prevede di richiamare, vanno scritte in mostra su una riga dedicata e collegate sintatticamente al testo. Una volta completato, il documento va scansionato in formato PDF e caricato sulla piattaforma Moodle del corso.

Esercitazione 3 — Energia elastica

Date di assegnazione, consegna e discussione: da definire.

Un materiale elastico restituisce il lavoro che riceve: deformato lungo un ciclo e riportato allo stato naturale, chiude il bilancio a zero. La Proposizione 3.4 delle note (P-3.4) dà a questa idea una forma precisa: il principio del lavoro di deformazione non negativo vale se e solo se esiste un potenziale elastico $\mathsf{W_e}$ di cui lo sforzo normale e il momento flettente sono le derivate. Questa esercitazione ricostruisce il lavoro di deformazione, la dimostrazione di P-3.4 e il suo uso in due esercizi numerici: un confronto fra cammini nel piano delle deformazioni e il potenziale di una sezione formata da due materiali, applicato alla flessione di una mensola caricata da una coppia all'estremo libero.

Riferimenti e notazioni

Si studino, nelle note italiane di Marigo, capitolo 3:

- §3.3.1 «Giustificazione per l'esistenza di energia elastica»: «Processo di deformazione considerato»; «Lavoro di forze esterne e lavoro di deformazione», con la Proposizione 3.3; «Le proprietà del lavoro di deformazione per i mezzi elastici»; «Principio del lavoro di deformazione e sue conseguenze», con il Principio 3.2; «Esistenza dell'energia elastica», con la Proposizione 3.4 e la sua dimostrazione.

- §3.3.2 «Possibili forme e dipendenze dell'energia elastica»: la Proposizione 3.5, con le ipotesi H4–H5 e la (3.10); «Alcuni esempi di potenziale elastico», punto 1 (sezione omogenea, (3.11)–(3.13)) e punto 2 «Sezione eterogenea e materiali elastici lineari», (3.14)–(3.16).

Servono dal capitolo 1 le relazioni (1.37) e (1.39) fra velocità e deformazioni, e dal capitolo 2 le equazioni locali di equilibrio. Dall'analisi servono curve regolari a tratti nel piano, integrali di linea e rapporti incrementali.

Notazioni, come nelle note. Lo stato di un punto materiale è la coppia (ε, κ) della deformazione d'estensione ε (adimensionale) e della deformazione di flessione κ (in m^{-1}); lo stato naturale è $(0, 0)$. Le leggi elastiche sono $N = \mathsf{N_e}(\varepsilon, \kappa)$ e $M = \mathsf{M_e}(\varepsilon, \kappa)$, con $\mathsf{N_e}(0, 0) = \mathsf{M_e}(0, 0) = 0$. Le densità di forza e di coppia per unità di lunghezza di riferimento sono $\mathbf{f}_t$ e m_t; le forze e le coppie alle estremità sono $\mathcal{F}_t$ e $\mathcal{M}_t$; $\dot{\mathbf{x}}_t$ e $\dot{\omega}_t$ sono la velocità e la velocità angolare lagrangiane. Per un percorso orientato Γ nel piano (ε, κ) il lavoro di deformazione per unità di lunghezza di riferimento è

$$\mathcal{W}(\Gamma) = \int_{\Gamma} \left(\mathsf{N_e}(\varepsilon, \kappa)\, d\varepsilon + \mathsf{M_e}(\varepsilon, \kappa)\, d\kappa \right),$$

e Γ^{R} indica lo stesso percorso descritto in verso opposto. Un lavoro per unità di lunghezza si misura in $\mathsf{J/m} = \mathsf{N}$.

Sezione 1 — Il lavoro di deformazione

Si consideri il processo di §3.3.1: un mezzo curvilineo elastico e omogeneo, di lunghezza di riferimento ℓ_{R}, passa per stati omogenei $(\varepsilon_t, \kappa_t)$, $t \in [t_0, t_1]$, dallo stato naturale a uno stato finale, in modo quasistatico. La Proposizione 3.3 afferma che il lavoro degli sforzi esterni è

$$W = \ell_{\mathsf{R}} \int_{t_0}^{t_1} (N_t \dot{\varepsilon}_t + M_t \dot{\kappa}_t)\, dt.$$

Domanda 1.1 — Potenza degli sforzi esterni dopo la sostituzione dell'equilibrio

1.1 Si scriva la potenza P_t degli sforzi esterni, con i contributi delle due estremità e delle densità distribuite. Vi si sostituiscano poi le relazioni di equilibrio delle note

$$\mathbf{f}_t = -\mathbf{R}_t', \qquad m_t = -(1+\varepsilon_t)T_t, \qquad \mathcal{F}_t(0) = -\mathbf{R}_t(0), \qquad \mathcal{M}_t(0) = -M_t, \qquad \mathcal{F}_t(\ell_{\mathsf{R}}) = \mathbf{R}_t(\ell_{\mathsf{R}}), \qquad \mathcal{M}_t(\ell_{\mathsf{R}}) = M_t.$$

- Da quale equazione locale di equilibrio segue $m_t = -(1+\varepsilon_t)T_t$, e dove si usa che M_t è uniforme lungo il mezzo?

- Si mostri che i contributi delle coppie si riducono a $M_t \dot{\kappa}_t \ell_{\mathsf{R}}$, usando $\dot{\kappa}_t = \dot{\omega}_t'$.

1.1

1.1 (segue)

1.1 (segue)

1.1 (segue)

1.1 (segue)

1.1 (segue)

1.1 (segue)

1.1 (segue)

Domanda 1.2 — Cancellazione del taglio e formula della Proposizione 3.3

1.2 Si integri per parti il termine $-\int_0^{\ell_{\mathsf{R}}} \mathbf{R}_t' \cdot \dot{\mathbf{x}}_t \, dS$ e si usino la (1.39), $(1+\varepsilon_t)\dot{\omega}_t = \dot{\mathbf{x}}_t' \cdot \mathbf{n}_t$, e la (1.37), $\dot{\mathbf{x}}_t' \cdot \mathbf{t}_t = \dot{\varepsilon}_t$, per ottenere

$$P_t = (N_t \dot{\varepsilon}_t + M_t \dot{\kappa}_t)\, \ell_{\mathsf{R}}.$$

- Quali termini di bordo si cancellano, e perché?
- In quale passaggio la scomposizione $\mathbf{R}_t = N_t \mathbf{t}_t + T_t \mathbf{n}_t$ elimina lo sforzo tagliante?
- In quale passaggio serve che deformazione e sforzo normale siano omogenei?

1.2

1.2 (segue)

1.2 (segue)

1.2 (segue)

1.2 (segue)

1.2 (segue)

1.2 (segue)

1.2 (segue)

Domanda 1.3 — Il lavoro dipende dal percorso, non dalla legge temporale

1.3 Per un mezzo elastico si verifichi che una riparametrizzazione regolare e crescente del tempo, $t = \phi(\tau)$, lascia invariato l'integrale $\int (\mathsf{N_e}\dot{\varepsilon} + \mathsf{M_e}\dot{\kappa})\, dt$, così che il lavoro si scrive come integrale di linea $\mathcal{W}(\Gamma)$.

Si dimostri poi, con la parametrizzazione $s \mapsto (\varepsilon(1-s), \kappa(1-s))$, che

$$\mathcal{W}(\Gamma^{\mathsf{R}}) = -\mathcal{W}(\Gamma).$$

Quale ipotesi sulla legge costitutiva rende lecito il primo passaggio?

1.3

1.3 (segue)

1.3 (segue)

1.3 (segue)

1.3 (segue)

1.3 (segue)

1.3 (segue)

1.3 (segue)

Sezione 2 — Il principio del lavoro di deformazione e l'enunciato di P-3.4

Domanda 2.1 — Principio 3.2 e motivazione fisica

2.1 Si enunci il Principio 3.2. Si spieghi poi che cosa accadrebbe se esistesse un ciclo Γ, con partenza e arrivo nello stato naturale, tale che $\mathcal{W}(\Gamma) < 0$: quale energia riceverebbe l'esterno ripetendo il ciclo n volte?

2.1

2.1 (segue)

2.1 (segue)

2.1 (segue)

2.1 (segue)

Domanda 2.2 — Enunciato di P-3.4 con le ipotesi esplicite

2.2 Si enunci la Proposizione 3.4. Nella dimostrazione richiesta nella Sezione 3 si fissa il punto materiale e si rendono esplicite le ipotesi seguenti, che le note usano senza elencarle:

- (I1) gli stati ammessi formano un insieme aperto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ che contiene $(0, 0)$;
- (I2) ogni stato di $\mathcal{D}$ si raggiunge da $(0, 0)$ con un cammino regolare a tratti contenuto in $\mathcal{D}$;
- (I3) i cammini ammessi formano una classe chiusa per inversione e per concatenazione;
- (I4) le funzioni N_e e M_e sono continue in $\mathcal{D}$.

La tesi è l'esistenza di W_e, con derivate parziali continue in $\mathcal{D}$, tale che

$$\mathsf{N}_\mathsf{e}(\varepsilon, \kappa) = \frac{\partial \mathsf{W}_\mathsf{e}}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \kappa), \qquad \mathsf{M}_\mathsf{e}(\varepsilon, \kappa) = \frac{\partial \mathsf{W}_\mathsf{e}}{\partial \kappa}(\varepsilon, \kappa), \qquad \mathsf{W}_\mathsf{e}(0, 0) = 0.$$

Si indichi quale delle due implicazioni dell'equivalenza ha il Principio 3.2 come ipotesi e quale lo ha come tesi, e in quale delle due servono le ipotesi (I1)–(I3).

2.2

2.2 (segue)

2.2 (segue)

2.2 (segue)

2.2 (segue)

2.2 (segue)

Sezione 3 — Dimostrazione guidata di P-3.4

Si assume il Principio 3.2 e si costruisce il potenziale in tre passi, seguendo i punti a)–d) della dimostrazione nelle note; l'ultima domanda tratta l'implicazione inversa.

Domanda 3.1 — Il lavoro di ogni ciclo che parte da (0,0) è nullo

3.1 Sia Γ un ciclo ammesso con partenza e arrivo in $(0,0)$. Si applichi il principio a Γ e a Γ^{R} e si concluda che $\mathcal{W}(\Gamma) = 0$.

- Perché Γ^{R} è un ciclo ammesso?

Si indichi l'ipotesi fra (I1)–(I4) e la proprietà della legge costitutiva che lo rendono un processo realizzabile.

- Perché dalle due disuguaglianze si ottiene un'uguaglianza?

3.1

3.1 (segue)

3.1 (segue)

3.1 (segue)

3.1 (segue)

3.1 (segue)

Domanda 3.2 — Indipendenza dal cammino e definizione del potenziale

3.2 Siano Γ_1 e Γ_2 due cammini ammessi da $(0,0)$ allo stesso stato (ε,κ). Si dimostri che $\mathcal{W}(\Gamma_1) = \mathcal{W}(\Gamma_2)$ applicando la Domanda 3.1 al ciclo ottenuto concatenando Γ_1 e Γ_2^{R}. Si definisca quindi $\mathsf{W_e}(\varepsilon,\kappa)$ come il lavoro lungo un cammino ammesso da $(0,0)$ a (ε,κ).

- Quali ipotesi fra (I1)–(I4) servono perché la definizione abbia senso in ogni punto di $\mathcal{D}$ e non dipenda dal cammino scelto?

- Perché $\mathsf{W_e}(0,0) = 0$?

3.2

3.2 (segue)

3.2 (segue)

3.2 (segue)

3.2 (segue)

3.2 (segue)

3.2 (segue)

Domanda 3.3 — Gli sforzi come derivate del potenziale

3.3 Fissato $(\varepsilon, \kappa) \in \mathcal{D}$, si concateni un cammino da $(0,0)$ a (ε,κ) con il segmento da (ε,κ) a $(\varepsilon+h,\kappa)$, parametrizzato da $t \in [0,1]$. Si dimostri che

$$\mathsf{W_e}(\varepsilon+h,\kappa) - \mathsf{W_e}(\varepsilon,\kappa) = \int_0^1 \mathsf{N_e}(\varepsilon + t h, \kappa)\, h \, dt$$

e se ne deduca $\partial \mathsf{W_e}/\partial\varepsilon = \mathsf{N_e}$.

- Perché il segmento è contenuto in $\mathcal{D}$ quando $|h|$ è abbastanza piccolo, e quanto valgono $\dot\varepsilon_t$ e $\dot\kappa_t$ lungo di esso?

- Quale ipotesi giustifica il passaggio al limite per $h \to 0$?

- Quale segmento fornisce, nello stesso modo, $\partial \mathsf{W_e}/\partial\kappa = \mathsf{M_e}$?

3.3

3.3 (segue)

3.3 (segue)

3.3 (segue)

3.3 (segue)

3.3 (segue)

3.3 (segue)

3.3 (segue)

3.3 (segue)

Domanda 3.4 — Implicazione inversa e proprietà nello stato naturale

3.4 Si supponga che esista $\mathsf{W_e}$ con derivate parziali continue e uguali a $\mathsf{N_e}$ e $\mathsf{M_e}$. Lungo un tratto regolare $t \mapsto (\varepsilon_t, \kappa_t)$ si usi la regola della catena

$$\frac{d}{dt}\mathsf{W_e}(\varepsilon_t, \kappa_t) = \mathsf{N_e}(\varepsilon_t, \kappa_t)\,\dot{\varepsilon}_t + \mathsf{M_e}(\varepsilon_t, \kappa_t)\,\dot{\kappa}_t$$

per dimostrare che il lavoro lungo un cammino regolare a tratti vale $\mathsf{W_e}(\text{stato finale}) - \mathsf{W_e}(\text{stato iniziale})$, e quindi che il lavoro di ogni ciclo è nullo e il Principio 3.2 è soddisfatto. Si ricavino infine dalla naturalità dello stato di riferimento le tre condizioni

$$\mathsf{W_e}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial \mathsf{W_e}}{\partial \varepsilon}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial \mathsf{W_e}}{\partial \kappa}(0,0) = 0.$$

3.4

3.4 (segue)

3.4 (segue)

3.4 (segue)

3.4 (segue)

3.4 (segue)

3.4 (segue)

Sezione 4 — Esercizio 1: lavoro lungo cammini diversi

Una legge elastica lineare con accoppiamento fra estensione e flessione è

$$\mathsf{N_e}(\varepsilon,\kappa) = K\varepsilon + B\kappa, \qquad \mathsf{M_e}(\varepsilon,\kappa) = B\varepsilon + D\kappa,$$

con $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$, $K = 100\,\text{kN}$, $B = 1\,\text{kN m}$, $D = 20\,\text{kN m}^2$. Lo stato finale è $(\varepsilon_f, \kappa_f) = (0.01,\ 0.05\,\text{m}^{-1})$. Si considerano tre cammini da $(0,0)$ a $(\varepsilon_f, \kappa_f)$:

- cammino A: prima ε da 0 a ε_f con $\kappa = 0$, poi κ da 0 a κ_f con $\varepsilon = \varepsilon_f$;
- cammino B: prima κ da 0 a κ_f con $\varepsilon = 0$, poi ε da 0 a ε_f con $\kappa = \kappa_f$;
- cammino C: il segmento $t \mapsto (t\varepsilon_f, t\kappa_f)$, $t \in [0,1]$.

Domanda 4.1 — Unità dei coefficienti e lavoro lungo il cammino A

4.1 Si verifichi che, con le unità assegnate, $\mathsf{N_e}$ è una forza e $\mathsf{M_e}$ un momento, indicando l'unità che B deve avere in ciascuna delle due leggi. Si parametrizzino i due tratti del cammino A e si calcoli $\mathcal{W}(A)$, prima in forma simbolica e poi in N.

4.1

4.1 (segue)

4.1 (segue)

4.1 (segue)

4.1 (segue)

Domanda 4.2 — Lavoro lungo i cammini B e C

4.2 Si calcolino $\mathcal{W}(B)$ e $\mathcal{W}(C)$, in forma simbolica e numerica, e si confrontino con $\mathcal{W}(A)$.

4.2

4.2 (segue)

4.2 (segue)

4.2 (segue)

4.2 (segue)

4.2 (segue)

Domanda 4.3 — Potenziale e verifica delle derivate

4.3 Si determini il potenziale $W_e(\varepsilon, \kappa)$ con $W_e(0, 0) = 0$,
si verifichi che le sue derivate parziali sono N_e e M_e e se ne calcoli il valore nello stato finale.
Che cosa rappresenta il numero ottenuto, e quale dato manca per passare all'energia di un'asta di lunghezza assegnata?

4.3

4.3 (segue)

4.3 (segue)

4.3 (segue)

4.3 (segue)

4.3 (segue)

Domanda 4.4 — Una legge che viola il principio

4.4 Si sostituisca la seconda legge con $\mathsf{M_e}(\varepsilon, \kappa) = B'\varepsilon + D\kappa$, con $B' = 3\,\mathrm{kN\,m}$, lasciando invariata la prima. Si ricalcolino $\mathcal{W}(A)$ e $\mathcal{W}(B)$ e il lavoro del ciclo che percorre B e poi A in verso opposto. Che cosa dice il risultato sul Principio 3.2, e quale condizione sui coefficienti è necessaria perché esista un potenziale?

Suggerimento: se un potenziale esiste ed è di classe C^2, le sue derivate seconde miste coincidono.

4.4

4.4 (segue)

4.4 (segue)

4.4 (segue)

4.4 (segue)

4.4 (segue)

Sezione 5 — Esercizio 2: sezione eterogenea e materiali elastici lineari

Riferimento: note di Marigo, §3.3.2, «Alcuni esempi di potenziale elastico», punto 2, (3.14)–(3.16), con la Proposizione 3.5 e le ipotesi H4–H5.

Si consideri una sezione rettangolare di riferimento con origine nel centro geometrico,

$$\Sigma_{\mathsf{R}} = \{(Y,Z):\ -H/2 < Y < H/2,\ -b/2 < Z < b/2\}, \qquad b, H > 0,$$

formata da due materiali elastici lineari uniti senza scorrimento lungo $Y = 0$. Il modulo di Young è costante in ciascuna metà:

$$\mathsf{E}(Y,Z) = \begin{cases} E_a, & 0 < Y < H/2, \\ E_b, & -H/2 < Y < 0, \end{cases} \qquad E_a, E_b > 0.$$

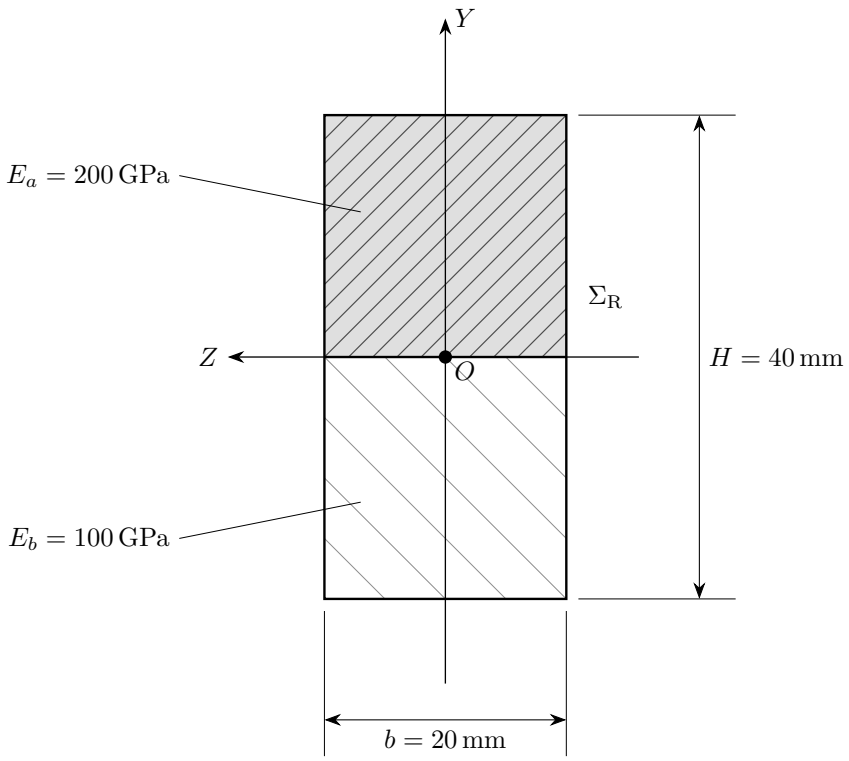


Figura 1 — Sezione di riferimento Σ_{R} con i dati numerici: origine O nel centro, Y verso l'alto e Z verso sinistra come nella Figura 3.14 delle note; interfaccia in $Y = 0$.

Valgono le ipotesi della Proposizione 3.5 con H4–H5, così che la deformazione d'estensione della fibra in (Y,Z) è $\varepsilon - \kappa Y$. Il potenziale del materiale è $\mathsf{w}_{\mathsf{ex}}(Y,Z;\varepsilon) = \frac{1}{2}\mathsf{E}(Y,Z)\varepsilon^2$, energia per unità di volume di riferimento. Dati numerici, usati dalle Domande 5.5, 5.6 e 5.9–5.11: $b = 20\,\mathrm{mm}$, $H = 40\,\mathrm{mm}$, $E_a = 200\,\mathrm{GPa}$, $E_b = 100\,\mathrm{GPa}$.

Domanda 5.1 — Dall'energia della fibra all'energia della sezione

5.1 Si sostituisca $\varepsilon - \kappa Y$ nella (3.10), si sviluppi il quadrato e si scriva $\mathsf{W_e}(\varepsilon, \kappa)$ come combinazione di ε^2, $\varepsilon\kappa$ e κ^2 con coefficienti dati da integrali sulla sezione.

Si confronti il risultato con la (3.14) e la (3.15), riconoscendo $\overline{\mathsf{EA}}$, $\overline{\mathsf{EC}}$ e $\overline{\mathsf{EI}}$.

Che differenza c'è fra $\mathsf{w_{ex}}$ e $\mathsf{W_e}$?

5.1

5.1 (segue)

5.1 (segue)

5.1 (segue)

5.1 (segue)

5.1 (segue)

Domanda 5.2 — Calcolo delle tre quantità integrate

5.2 Si calcolino $\overline{\mathrm{EA}}$, $\overline{\mathrm{EC}}$ e $\overline{\mathrm{EI}}$ in funzione di b, H, E_a, E_b, separando le due metà della sezione e integrando prima rispetto a Z e poi rispetto a Y.

5.2

5.2 (segue)

5.2 (segue)

5.2 (segue)

5.2 (segue)

5.2 (segue)

Domanda 5.3 — Unità e significato dei coefficienti

5.3 Si determinino le unità SI di $\overline{\mathrm{EA}}$, $\overline{\mathrm{EC}}$ e $\overline{\mathrm{EI}}$ e si verifichi che i tre addendi di W_e sono energie per unità di lunghezza.

Il rettangolo è simmetrico rispetto a $Y = 0$: perché $\overline{\mathrm{EC}}$ non è nullo, e quale condizione sulla distribuzione di $E(Y, Z)$ lo annullerebbe?

5.3

5.3 (segue)

5.3 (segue)

5.3 (segue)

Domanda 5.4 — Sforzo normale e momento flettente

5.4 Si calcolino $N = \partial \mathsf{W_e}/\partial\varepsilon$ e $M = \partial \mathsf{W_e}/\partial\kappa$, si confrontino con la (3.16) e si verifichi che lo stato $(0, 0)$ è privo di sforzi.

5.4

5.4 (segue)

5.4 (segue)

5.4 (segue)

Domanda 5.5 — Valori numerici

5.5 Con i dati numerici, convertiti in unità SI, si calcolino $\overline{\mathrm{EA}}$, $\overline{\mathrm{EC}}$ e $\overline{\mathrm{EI}}$. Per $\varepsilon = 10^{-3}$ e $\kappa = 10^{-2}\,\mathrm{m}^{-1}$ si calcolino $\mathrm{W_e}$, N e M, con unità e segni.

5.5

5.5 (segue)

5.5 (segue)

5.5 (segue)

5.5 (segue)

5.5 (segue)

5.5 (segue)

Domanda 5.6 — Sforzo normale con momento nullo

5.6 Si imponga $M = 0$ nella legge del momento, si ricavi κ in funzione di ε e si sostituisca nella legge dello sforzo normale, ottenendo la rigidezza estensionale efficace N/ε. Con i dati numerici e $\varepsilon = 10^{-3}$ si calcolino κ e N.

Perché un momento nullo non comporta una curvatura nulla?

5.6

5.6 (segue)

5.6 (segue)

5.6 (segue)

5.6 (segue)

5.6 (segue)

Domanda 5.7 — Limite omogeneo

5.7 Si ponga $E_a = E_b = E$ nelle espressioni della Domanda 5.2, si riconoscano l'area A e il momento d'inerzia I del rettangolo e si verifichi che si ottengono la (3.11) e la (3.13).

Di quanto cambiano, rispetto alla sezione omogenea con $E = E_b$, la rigidezza estensionale e quella flessionale della sezione dei dati numerici?

5.7

5.7 (segue)

5.7 (segue)

Mensola soggetta a una coppia all'estremo libero

Una mensola con la sezione eterogenea appena studiata è rettilinea nella configurazione di riferimento, $\mathbf{x}_{\mathsf{R}}(S) = S\,\mathbf{e}_1$ per $S \in (0, L)$, quindi $\ell_{\mathsf{R}} = L$ e $\mathsf{C}_{\mathsf{R}} = 0$. È incastrata in $S = 0$, cioè $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ e $\alpha(0) = 0$. Nell'estremo libero $S = L$ agisce soltanto la coppia concentrata $\mathcal{M}(L)$ della figura, orientata in modo da abbassare l'estremo; non agiscono forze concentrate in $S = L$ né carichi distribuiti. Si usano la terna $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ con $\mathbf{e}_2$ verso l'alto, le coppie positive se antiorarie e le definizioni del capitolo 1: $1 + \varepsilon = \|\mathbf{x}'\|$, $\mathbf{x}' = (1+\varepsilon)(\cos\alpha\,\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\,\mathbf{e}_2)$, $\kappa = \omega'$ con $\omega = \alpha - \alpha_{\mathsf{R}}$. La curvatura C della deformata è legata alle deformazioni da $(1+\varepsilon)\mathsf{C} = \kappa + \mathsf{C}_{\mathsf{R}}$. Dati: la sezione della Domanda 5.5, $L = 3\,\mathrm{m}$, $|\mathcal{M}(L)| = 400\,\mathrm{N\,m}$. La mensola non si suppone inestensibile.

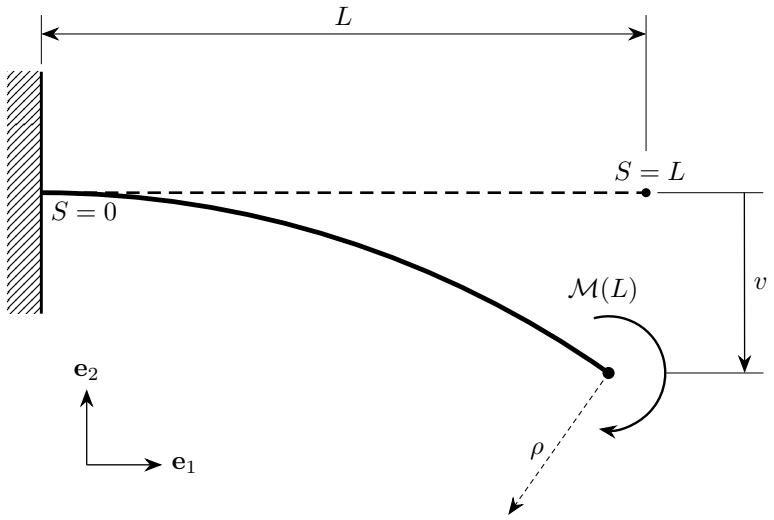


Figura 2 — Mensola incastrata in $S = 0$ con la coppia concentrata $\mathcal{M}(L)$ applicata all'estremo libero $S = L$: configurazione di riferimento (tratteggio) e deformata, non in scala; ρ è il raggio della deformata e v lo spostamento verticale dell'estremo.

Domanda 5.8 — Sforzi interni nella mensola

5.8 Si scrivano le condizioni all'estremo libero e le equazioni locali di equilibrio in assenza di carichi distribuiti, e si dimostri che $\mathbf{R}(S) = \mathbf{0}$ e $M(S) = \mathcal{M}(L)$ per ogni $S \in (0, L)$, quindi $N = T = 0$.

Si indichi il valore con segno di $\mathcal{M}(L)$ per la coppia oraria della figura.

5.8

5.8 (segue)

5.8 (segue)

5.8 (segue)

5.8 (segue)

Domanda 5.9 — Deformazioni di estensione e di flessione accoppiate

5.9 Si impongano $N = 0$ e $M = \mathcal{M}(L)$ nelle leggi della Domanda 5.4,

$$\overline{\mathsf{EA}}\,\varepsilon - \overline{\mathsf{EC}}\,\kappa = 0, \qquad -\overline{\mathsf{EC}}\,\varepsilon + \overline{\mathsf{EI}}\,\kappa = \mathcal{M}(L),$$

e si ricavino ε e κ in funzione di $\mathcal{M}(L)$, prima in forma simbolica e poi numerica. Si calcolino le deformazioni $\varepsilon - \kappa Y$ delle fibre estreme $Y = \pm H/2$ e i corrispondenti sforzi $\mathsf{E}\,(\varepsilon - \kappa Y)$, e si dica se sono compatibili con un comportamento elastico lineare.

Perché la linea d'asse cambia lunghezza anche se lo sforzo normale è nullo?

5.9

5.9 (segue)

5.9 (segue)

5.9 (segue)

5.9 (segue)

5.9 (segue)

5.9 (segue)

5.9 (segue)

5.9 (segue)

5.9 (segue)

Domanda 5.10 — Configurazione deformata

5.10 Si integrino $\alpha' = \kappa$ e $\mathbf{x}' = (1+\varepsilon)(\cos\alpha\,\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\,\mathbf{e}_2)$ con le condizioni d'incastro e si dimostri che la linea d'asse deformata è un arco di cerchio. Si determinino la curvatura C, il raggio $\rho = 1/|\mathrm{C}|$, la posizione del centro di curvatura, l'angolo al centro e la lunghezza della deformata, tenendo distinti κ e C.

5.10

5.10 (segue)

5.10 (segue)

5.10 (segue)

5.10 (segue)

5.10 (segue)

Domanda 5.11 — Spostamento dell'estremo libero

5.11 Si scriva $\mathbf{x}(L) - \mathbf{x}_{\mathrm{R}}(L) = u\,\mathbf{e}_1 + v\,\mathbf{e}_2$ e si calcolino u e v con il loro segno, in forma esatta e numerica.

Si confronti v con l'approssimazione per piccole rotazioni $v \approx \kappa L^2/2$, e u con il valore che si otterrebbe ponendo $\varepsilon = 0$.

Quale delle due semplificazioni produce l'errore relativo maggiore, e perché?

5.11

5.11 (segue)

5.11 (segue)

5.11 (segue)

5.11 (segue)

5.11 (segue)

5.11 (segue)

Risultati di controllo

Esercizio 1: $\mathcal{W}(A) = \mathcal{W}(B) = \mathcal{W}(C) = 30.5\,\mathrm{N}$; con $B' = 3\,\mathrm{kN\,m}$ il ciclo ha lavoro di modulo $1.0\,\mathrm{N}$. Esercizio 2: $\overline{\mathrm{EA}} = 1.2\times10^{8}\,\mathrm{N}$, $\overline{\mathrm{EC}} = 4\times10^{5}\,\mathrm{N\,m}$, $\overline{\mathrm{EI}} = 1.6\times10^{4}\,\mathrm{N\,m^2}$; $\mathrm{W_e} = 56.8\,\mathrm{J/m}$, $N = 116\,\mathrm{kN}$, $M = -240\,\mathrm{N\,m}$; con $M = 0$: $\kappa = 2.5\times10^{-2}\,\mathrm{m^{-1}}$, $N = 110\,\mathrm{kN}$. Mensola: $\kappa \approx -2.73\times10^{-2}\,\mathrm{m^{-1}}$, $\varepsilon \approx -9.09\times10^{-5}$, $\rho \approx 36.66\,\mathrm{m}$, $v \approx -122.6\,\mathrm{mm}$, $u \approx -3.62\,\mathrm{mm}$.

Approfondimenti facoltativi

Gli approfondimenti non fanno parte della consegna; si affrontano dopo le Sezioni 1–5, sulle stesse note.

- Esercizio 3.1 delle note: si esprima il lavoro di deformazione con la deformazione di Green-Lagrange $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2$ e con $\tilde{\kappa} = \mathsf{C} - \mathsf{C}_\mathsf{R}$, e si spieghi perché l'espressione è meno semplice di quella della Proposizione 3.3.

- «Gli sforzi esterni» (§3.3.1): con $m_t = 0$ si ricavi la pressione normale $p = \mathsf{C}N$ della (3.5) e si confronti con l'Osservazione 3.1.

- Proposizione 3.6: si verifichino le tre simmetrie sul potenziale della Sezione 5 e si spieghi quale di esse cade quando $E_a \neq E_b$.

- Si dimostri $\overline{\mathsf{EA}}\,\overline{\mathsf{EI}} > \overline{\mathsf{EC}}^2$ con il polinomio $P(\alpha)$ delle note, lo si verifichi sui dati numerici e si usi la (3.17) per calcolare le deformazioni prodotte da $N = 10\,\mathsf{kN}$ con $M = 0$.

- Esempio 3.2 (trave in calcestruzzo armato): si scrivano $\overline{\mathsf{EA}}$, $\overline{\mathsf{EC}}$ e $\overline{\mathsf{EI}}$ e si spieghi perché l'armatura conta più nella rigidezza flessionale che in quella estensionale.

Consegna

Si consegnano le risposte alle Domande 1.1–5.11, scritte negli spazi del documento stampabile. Ogni passaggio della dimostrazione deve citare l'ipotesi, la definizione o l'equazione delle note che lo rende lecito; ogni risultato numerico va scritto con la sua unità.