Prova intermedia: soluzioni

Risposte corrette: A1 A, A2 B, A3 A, A4 C, A5 D, A6 C, A7 D, A8 A, A9 B, A10 D, B1 C, B2 B. La risposta E ("Nessuna delle risposte è corretta") non è mai quella corretta. Ogni lettera corretta compare tre volte su dodici domande (A: A1, A3, A8; B: A2, A9, B2; C: A4, A6, B1; D: A5, A7, A10).

Tipo delle domande: definizioni: A1, A2, A3, A4, A9, A10; enunciati (teoremi e proposizioni, con ipotesi e conseguenze): A5, A6, A7, A8, B1, B2. Ripartizione per argomento: geometria e deformazione A1–A5; sforzi interni ed equilibrio A6, A7, B1; fili A8, A9; barre A10, B2.

A1 – A (definizione). $\varepsilon = ds/dS - 1 = \|\mathbf{x}'\| - 1$: allungamento relativo dell'elemento di lunghezza di riferimento dS; la condizione di non degenerazione è $\varepsilon > -1$, cioè $\|\mathbf{x}'\| > 0$. *Distrattori:* B riferisce la variazione di lunghezza alla lunghezza deformata; C usa la norma di $\boldsymbol{\xi}'$, che non si annulla in una rotazione rigida ($\boldsymbol{\xi}' = (\mathbf{Q} - \mathbf{I})\mathbf{t}_\mathrm{R} \neq \mathbf{0}$); D prende come definizione l'espressione linearizzata, valida solo per piccoli spostamenti e riferimento rettilineo.

A2 – B (definizione). $\kappa = d\omega/dS = d\alpha/dS - d\alpha_\mathrm{R}/dS$. *Distrattori:* A identifica κ con la variazione di curvatura. Poiché $d\alpha/dS = (1+\varepsilon)\mathrm{C}$ e $d\alpha_\mathrm{R}/dS = \mathrm{C_R}$, si ha $\kappa = (1+\varepsilon)\mathrm{C} - \mathrm{C_R}$, quindi $\mathrm{C} - \mathrm{C_R} = (\kappa - \varepsilon \mathrm{C_R})/(1+\varepsilon)$: un anello di raggio R_0 dilatato uniformemente fino al raggio R cambia curvatura da $1/R_0$ a $1/R$, ma $\omega = 0$ e $\kappa = 0$. C prende l'espressione linearizzata per piccoli spostamenti e riferimento rettilineo; D deriva rispetto a s invece che a S, ottenendo $\kappa/(1+\varepsilon)$.

A3 – A (definizione). Il segno della curvatura algebrica dipende dall'orientazione: la circonferenza di raggio R percorsa in senso antiorario, $\mathbf{x} = R(\cos\theta\,\mathbf{e}_1 + \sin\theta\,\mathbf{e}_2)$, ha $\alpha = \theta + \pi/2$, $s = R\theta$ e $\mathrm{C} = 1/R$; percorsa in senso orario ha $\mathrm{C} = -1/R$. Con l'orientazione invertita $\mathbf{t} \to -\mathbf{t}$, quindi $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{t} \to -\mathbf{n}$ e $\alpha \to \alpha + \pi$, sia nella configurazione deformata sia in quella di riferimento; l'ascissa curvilinea è percorsa al contrario ($dS \to -dS$, $ds \to -ds$). Ne segue: $\varepsilon = ds/dS - 1$ invariata; la rotazione $\omega = \alpha - \alpha_\mathrm{R}$ invariata come funzione del punto materiale, quindi $\kappa = d\omega/dS$ cambia segno (coerentemente con $\kappa = (1+\varepsilon)\mathrm{C} - \mathrm{C_R}$, in cui entrambe le curvature cambiano segno). *Distrattori:* B dimentica che $\mathbf{n}$ è costruito da $\mathbf{t}$; C confonde la curvatura algebrica con il suo modulo; D estende il cambio di segno all'estensione, che è un rapporto di lunghezze.

A4 – C (definizione). $\omega(S) = \alpha(S) - \alpha_\mathrm{R}(S)$: variazione di orientamento del riferimento locale nello stesso punto materiale. *Distrattori:* A prende l'espressione linearizzata, valida solo per piccoli spostamenti e riferimento rettilineo; B confronta punti diversi della configurazione deformata invece delle due configurazioni nello stesso punto materiale; D confonde l'orientazione della tangente con la direzione dello spostamento.

A5 – D (teorema). Per definizione $\mathrm{s}' = 1 + \varepsilon$ e $\alpha' = \kappa + \alpha'_\mathrm{R}$, dove α_R è lo stesso per le due deformate. Dati ε e κ, una prima integrazione dà α a meno di una costante (rotazione complessiva); una seconda integrazione di $\mathbf{x}' = \mathrm{s}'(\cos\alpha\,\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\,\mathbf{e}_2)$ dà $\mathbf{x}$ a meno di un vettore costante (traslazione complessiva). Due deformate con le stesse ε e κ differiscono quindi per uno spostamento di corpo rigido. Con $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_\mathrm{R}$ ($\varepsilon = \kappa = 0$) si ritrova che deformazioni nulle caratterizzano gli spostamenti rigidi. Per un mezzo aperto non servono condizioni di compatibilità; per un anello chiuso la curva ricostruita dovrebbe anche chiudersi. *Distrattori:* A trascura la flessione (un'asta rettilinea avvolta senza allungamento su un disco di raggio R ha $\varepsilon = 0$, come la configurazione rettilinea, ma $\kappa = \pm 1/R$); B "dimentica" la costante d'integrazione della seconda integrazione (traslazione); C crede che la curvatura di riferimento distingua le due deformate, mentre è la stessa per entrambe.

A6 – C (teorema). La parte (s', s'') è soggetta in s' agli sforzi reciproci $(\mathbf{R}^r(s'), M^r(s'))$ e in s'' agli sforzi diretti $(\mathbf{R}(s''), M(s''))$. Per la località degli sforzi interni, questi coincidono con quelli che agiscono sulle parti (s', ℓ) e $(0, s'')$. Sommando le equazioni di equilibrio di (s', ℓ) e di $(0, s'')$ e sottraendo quelle dell'intero mezzo, gli sforzi esterni che restano sono esattamente quelli agenti su (s', s''): risultante e momento risultante di (s', s'') sono nulli. *Distrattori:* A estende al mezzo deformabile la sufficienza delle equazioni cardinali del solido rigido; B nega che basti una famiglia

generatrice di parti; D afferma l'azione e reazione anche nei punti caricati, dove invece $\mathbf{R}^r + \mathbf{R} = \mathcal{F}_s$ e $M^r + M = \mathcal{M}_s$ (A7).

A7 – D (teorema). Si sommano le equazioni di equilibrio di (s, ℓ), soggetta in s agli sforzi reciproci, e di $(0, s)$, soggetta in s agli sforzi diretti, e si sottraggono quelle dell'intero mezzo. Restano gli sforzi interni in s e gli eventuali sforzi concentrati applicati in s, che non appartengono a nessuno dei due intervalli aperti: $\mathbf{R}^r(s) + \mathbf{R}(s) = \mathcal{F}_s$ e $M^r(s) + M(s) = \mathcal{M}_s$ se $s \in \mathbb{P}$, $\mathbf{0}$ e 0 altrimenti (i bracci delle forze applicate in s rispetto a $\mathbf{x}(s)$ sono nulli). *Distrattori:* A prende come postulato l'azione e reazione, valida solo fuori da $\mathbb{P}$; B sbaglia il segno, confondendo con il salto degli sforzi diretti, $[\![\mathbf{R}]\!](s) = -\mathcal{F}_s$; C dimentica le coppie concentrate.

A8 – A (proposizione). La condizione all'estremità $S = \ell_{\mathrm{R}}$ è $\mathbf{R}(\ell_{\mathrm{R}}) = \mathcal{F}$, cioè $N(\ell_{\mathrm{R}})\mathbf{t}(\ell_{\mathrm{R}}) = \mathcal{F}$. Poiché $\|\mathbf{t}\| = 1$, si ha $|N| = \|\mathcal{F}\|$, e la condizione di stabilità $N \geq 0$ seleziona $N = \|\mathcal{F}\|$ e $\mathbf{t} = \mathcal{F}/\|\mathcal{F}\|$ se $\mathcal{F} \neq \mathbf{0}$; se $\mathcal{F} = \mathbf{0}$, $N = 0$ e $\mathbf{t}$ resta da determinare. *Distrattori:* B accetta la soluzione con $N < 0$, che soddisfa l'equilibrio ma viola la condizione di stabilità; C usa il segno valido all'estremità $S = 0$, dove $N(0)\mathbf{t}(0) = -\mathcal{F}$; D attribuisce al filo uno sforzo tagliante.

A9 – B (definizione). $|\mathrm{f}_t| \leq k\,\mathrm{f}_n$, con $\mathrm{f}_n \geq 0$ (assenza di coesione). Con la disuguaglianza stretta il punto aderisce; con l'uguaglianza il cavo può scorrere, e la forza d'attrito si oppone allo scorrimento: se $\mathrm{f}_t = k\,\mathrm{f}_n > 0$, il cavo scorre nel verso di $-\mathbf{t}$. *Distrattori:* A confonde la soglia con il valore effettivo della forza d'attrito; C ammette coesione ($\mathrm{f}_n < 0$); D scambia le componenti.

A10 – D (definizione). Configurazioni rettilinee $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathrm{s}(S)\mathbf{t}$, $\mathbf{R} = N\mathbf{t}$, $M = 0$; rispetto ai fili si ammette $N < 0$ (compressione) e si considerano soltanto configurazioni rettilinee. *Distrattori:* A importa dai fili la condizione $N \geq 0$; B introduce uno sforzo tagliante, escluso dal modello, in cui lo sforzo interno è puramente assiale; C ammette configurazioni curve.

B1 – C (teorema). Integrando le equazioni locali su un intervallo si ottengono soltanto i limiti laterali, mai i valori nei punti di $\mathbb{P}$; il valore in s_1 è fissato dalla continuità a sinistra, $\mathbf{R}(s_1) = \mathbf{R}^-(s_1)$. La condizione di salto dà $\mathbf{R}^+(s_1) = \mathbf{R}(s_1) - \mathcal{F}_{s_1}$, quindi $\mathbf{R}^r(s_1) = \mathcal{F}_{s_1} - \mathbf{R}(s_1) = -\mathbf{R}^+(s_1)$. *Distrattori:* A omette la condizione di salto. Integrando l'equazione locale delle forze su $(0, \ell) \setminus \{s_1\}$ e usando le condizioni agli estremi si ottiene $\mathcal{F}_0 + \int_0^\ell \mathbf{f}\,ds + \mathcal{F}_\ell - [\![\mathbf{R}]\!](s_1) = \mathbf{0}$: l'equilibrio globale richiede proprio $[\![\mathbf{R}]\!](s_1) = -\mathcal{F}_{s_1}$, mentre i due tratti si possono integrare separatamente, rispettando entrambe le condizioni agli estremi, anche per carichi non equilibrati. B ignora che il risultato garantisce l'equilibrio di ogni parte; D introduce una regola di media che il modello non prevede.

B2 – B (proposizione). Con $\mathbf{t} = \mathbf{e}_2$ verso l'alto, $f_{\mathrm{R}} = -\rho_m A g$ e $N' = \rho_m A g$. Caso (i): con $N(\ell_{\mathrm{R}}) = 0$ in sommità, $N(S) = -\rho_m A g(\ell_{\mathrm{R}} - S)$, indipendentemente dalla legge costitutiva, che serve solo a calcolare la configurazione. Caso (ii): $N(S) = N_0 + \rho_m A g S$ con N_0 non determinata dall'equilibrio (problema iperstatico); con $N = EA\,\varepsilon$ si ha $\mathrm{s}' = 1 + N/EA$, e la compatibilità $\int_0^{\ell_{\mathrm{R}}} \mathrm{s}'\,dS = \ell$ dà $N_0 = EA(\ell/\ell_{\mathrm{R}} - 1) - \frac{1}{2}\rho_m A g \ell_{\mathrm{R}}$. *Distrattori:* A ignora che nel caso (ii) manca una condizione sulla forza; C inverte i ruoli dei due casi; D trascura la deformabilità, che rende il problema iperstatico risolubile.

Nota sui distrattori. Ogni distrattore corrisponde a una lettura errata tipica di una definizione o di un enunciato: espressioni linearizzate prese come definizioni, misure riferite alla configurazione sbagliata, variazione di curvatura al posto della deformazione di flessione, curvatura algebrica confusa con il suo modulo, condizioni necessarie scambiate per sufficienti, costanti d'integrazione dimenticate, sufficienza delle cardinali del corpo rigido estesa al mezzo deformabile, sforzi diretti e reciproci scambiati, azione e reazione presa come postulato, segni delle condizioni agli estremi scambiati, compressione ammessa nei fili, taglio attribuito a fili e barre, iperstaticità confusa con indeterminazione. La risposta E è sempre un distrattore.