



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Dipartimento di Ingegneria
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Meccanica

L'ELASTICA DI EULERO

Tesi di Laurea in Scienza delle Costruzioni

Relatori:
Prof. Giuseppe Tomassetti
Prof. Marzio Lembo

Candidato:
Edoardo Braccini

Anno Accademico 2017-2018

Indice

1	Considerazioni introduttive	1
1.1	Statica di un corpo deformabile	1
1.2	Instabilità e biforcazione	2
2	Cenni storici	1
2.1	Il contributo di Giacomo Bernoulli	2
2.2	La collaborazione tra Leonardo Eulero e Daniele Bernoulli	5
2.3	Il carico critico euleriano	6
2.4	Determinazione delle equazioni indefinite di equilibrio: Metodo di Eulero	10
3	Teoria delle funzioni ellittiche	12
3.1	Introduzione	12
3.2	Costruzione della σu	17
3.3	Costruzione delle funzioni ζu , $\wp u$ e $\wp' u$	20
3.4	Applicazioni della teoria delle funzioni ellittiche	26
4	Equilibrio di una trave elastica	28
4.1	Introduzione	28
4.2	Cinematica della trave	28
4.3	Equilibrio della trave	30
4.4	Legame costitutivo	31
5	Risoluzione delle equazioni di equilibrio	33
5.1	Introduzione	33
5.2	Equazioni di equilibrio in componenti	33
5.3	Deformazione piana	34
5.4	Risoluzione attraverso la teoria delle funzioni ellittiche di Weierstrass	35
5.5	Elastica inflessionale	39
5.6	Elastica non inflessionale	43

Elenco delle figure

1.1	Trave incernierata soggetta a carico di punta	3
1.2	Posizione di equilibrio (a)	4
1.3	Posizione di equilibrio (b)	4
2.1	Albero genealogico dei matematici che hanno dato un contributo nel campo dell'elasticità	1
2.2	Pubblicazione sull'elastica di Giacomo Bernoulli, Acta Eruditorum, 1694	2
2.3	Semplificazione della costruzione geometrica in Fig. 2.2	3
2.4	Problema di minimo: disegno di Eulero, Additamentum I	5
2.5	Alcune delle curve elastiche enumerate da Eulero: di seconda specie (a), di quarta specie (b), di quinta specie (c), di sesta specie (d), di settima specie (e), di ottava specie (f).	6
2.6	Trave snella incastrata in C e libera in A, caricata da un peso verticale P	7
2.7	Colonna fissata sulla base A, portante il peso P	8
2.8	Inflessione della trave al variare del carico applicato P	8
2.9	Andamento del carico critico P_E in funzione dell'angolo φ_b	9
2.10	Grafico del carico critico P_E in funzione dell'angolo φ_b	9
3.1	Reticolo generato da ω e ω' (in celeste), parallelogramma fondamentale (in blu)	19
3.2	Nel grafico di sinistra si riportano sugli assi alla base la parte reale e la parte immaginaria dell'argomento u , sul terzo asse, invece, si riporta la parte reale di $\wp u$. Nel grafico di destra si riportano sugli assi alla base la parte reale e la parte immaginaria dell'argomento u , sul terzo asse, invece, si riporta la parte immaginaria di $\wp u$	24

3.3	Nel grafico di sinistra si riportano sugli assi alla base la parte reale e la parte immaginaria della variabile u , sul terzo asse si riporta il modulo della funzione $\wp u$. Nel grafico a destra si riporta sull'asse orizzontale il valore della variabile reale x e sull'asse verticale il valore assunto dalla $\wp u$	24
3.4	Nel grafico di sinistra si riportano sugli assi alla base la parte reale e la parte immaginaria dell'argomento u , sul terzo asse, invece, si riporta la parte reale di $\wp' u$. Nel grafico di destra si riportano sugli assi alla base la parte reale e la parte immaginaria dell'argomento u , sul terzo asse, invece, si riporta la parte immaginaria di $\wp' u$	25
3.5	Nel grafico di sinistra si riportano sugli assi alla base la parte reale e la parte immaginaria della variabile u , sul terzo asse si riporta il modulo della funzione $\wp' u$. Nel grafico a destra si riporta sull'asse orizzontale il valore della variabile reale x e sull'asse verticale il valore assunto dalla $\wp' u$	25
4.1	Le terne nelle due configurazioni	29
5.1	Reticolo di basi ω_1 e ω_3	37
5.2	Esempio di deformazione elastica inflessionale	40
5.3	Piano (Φ, γ) per un'elastica inflessionale costruito considerando $L = 8$	41
5.4	Deformazione elastica inflessionale con $\gamma = 30^\circ$	41
5.5	Deformazione elastica inflessionale con $\gamma = 60^\circ$	41
5.6	Deformazione elastica inflessionale con $\gamma = 105^\circ$	42
5.7	Deformazione elastica inflessionale con $\gamma = 130^\circ$	42
5.8	Deformazione elastica inflessionale con $\gamma = 140^\circ$	42
5.9	Esempio di deformazione elastica non inflessionale	43
5.10	Piano (Φ, h) per un'elastica non inflessionale costruito considerando $L = 8$	45
5.11	Deformazione elastica non inflessionale con $h = 1.5$	45
5.12	Deformazione elastica non inflessionale con $h = 3.2$	45
5.13	Deformazione elastica non inflessionale con $h = 4.8$	45
5.14	Deformazione elastica non inflessionale con $h = 7.5$	45

Sommario

La tesi ha l'obiettivo di studiare il comportamento, in campo non lineare, di una trave elastica soggetta ad azioni esterne. In particolar modo si vogliono scrivere le equazioni differenziali che descrivono l'equilibrio di una trave nella Teoria di Kirchhoff, e risolverle utilizzando le funzioni ellittiche di Weierstrass.

In seguito si analizzano le configurazioni di equilibrio trovate e la loro relazione con le azioni esterne.

Capitolo 1

Considerazioni introduttive

1.1 Statica di un corpo deformabile

La statica è la parte della meccanica che studia le condizioni di equilibrio di un corpo materiale, ovvero le condizioni affinché un corpo, inizialmente in quiete, resti in equilibrio anche dopo l'azione di forze esterne.

In questo studio si tratta la statica dei corpi deformabili.

I corpi deformabili sono corpi in cui la distanza tra due punti varia al variare delle forze applicate al corpo.

Se questi corpi presentano una dimensione predominante, rispetto alle altre, possono essere rappresentati e descritti attraverso dei segmenti di retta o dei tratti di curva. Per esempio nelle funi, i fili o nelle aste l'estensione in lunghezza è predominante rispetto alle dimensioni della sezione, questi oggetti possono essere quindi schematizzati attraverso segmenti o curve. La *linea elastica* di Eulero - o semplicemente l'*elastica* - rientra nella casistica suddetta ed è alla base della teoria delle curve elastiche.

La determinazione delle possibili configurazioni di equilibrio di un'asta elastica, sottile e inestensibile, di peso trascurabile, che risulti incastrata in una parete e soggetta a un carico assegnato è un problema che risale all'epoca dei matematici della famiglia Bernoulli e dell'illustre Leonardo Eulero, al quale, in particolare, si deve la risoluzione del quesito.

Una posizione viene definita di equilibrio se il corpo, posto con velocità nulla, tende a permanervi in quiete. Possiamo avere tre classi di equilibrio a seconda del comportamento del corpo a seguito di una piccola perturbazione:

Equilibrio stabile: un corpo si trova in una posizione di equilibrio stabile se, a seguito di piccole perturbazioni, tende a tornare in essa.

Equilibrio instabile: un corpo si trova in una posizione di equilibrio instabile se, a seguito di piccole perturbazioni, tende ad allontanarsi indefinitamente

da essa.

Equilibrio indifferente: un corpo si trova in una posizione di equilibrio indifferente se, a seguito di perturbazioni comunque piccole, tende a disporsi in una nuova posizione di equilibrio.

Con il termine carico, in ingegneria strutturale, si intende un sistema di forze applicate che possono dar luogo ad una sollecitazione interna della struttura e ad una deformazione della stessa. La trave viene definita *elastica* in quanto, una volta rimosso il carico, ritorna nella sua configurazione rettilinea iniziale. L'equazione che descrive l'equilibrio di una trave elastica non è lineare. Tuttavia molto spesso nelle applicazioni ingegneristiche le configurazioni deformate della trave non si discostano di molto dalle configurazioni di riferimento, in questi casi l'equazione dell'elastica si approssima con un'equazione lineare e si studia l'equilibrio facendo riferimento alla trave non deformata.

In alcuni casi questa approssimazione non è più valida, per esempio in una trave sottoposta a carico di punta, se i carichi applicati superano un determinato valore, *carico critico*, nascono configurazioni di equilibrio che sono differenti da quella iniziale. Il valore del carico critico può essere individuato anche senza dover risolvere l'equazione esatta, la risoluzione di questa equazione è invece necessaria se si vogliono determinare le configurazioni postcritiche della trave.

1.2 Instabilità e biforcazione

L'elastica rappresenta un esempio di soluzione di un problema non lineare di instabilità e biforcazione, che implica l'analisi dei comportamenti postcritici della trave.

L'instabilità delle posizioni di equilibrio è spesso legata a fenomeni di collasso strutturale, per questo motivo il suo studio è di fondamentale importanza.

Il problema della biforcazione consiste nell'analisi matematica dei cambiamenti qualitativi o della struttura topologica degli integrali di un campo vettoriale o, equivalentemente, della soluzione di un'equazione differenziale. Si vogliono studiare i casi in cui una piccola variazione dei valori dei parametri di biforcazione causa un cambiamento "qualitativo" o topologico del sistema, ossia un cambiamento del numero di punti di equilibrio o della loro natura, in quanto questi cambiamenti possono anche portare ad effetti disastrosi.

I valori *critici* sono i valori per cui si hanno cambiamenti "qualitativi" del sistema. Incrementando, in maniera quasi statica, le forze applicate ad una struttura nella sua configurazione di riferimento, si nota che essa passa attraverso una successione continua di stati di equilibrio. Se si introduce un

parametro di carico λ , da cui dipendono le forze applicate, si osserva che al variare di λ le configurazioni di equilibrio disegnano nello spazio delle configurazioni del sistema un percorso di equilibrio, ovvero l'insieme di configurazioni nelle quali il sistema risulta in equilibrio.

Se per un punto nello spazio delle configurazioni, con un determinato λ , passano più percorsi di equilibrio, quel punto viene definito "punto di biforcazione" e il carico associato a quel punto è un *carico critico*.

Un esempio comune di biforcazione si riscontra nello studio delle configurazioni di equilibrio di una trave di lunghezza l incernierata a una delle sue estremità, cui è connessa una molla di rigidezza K ; la trave è inoltre soggetta a un carico di compressione P in corrispondenza dell'estremità libera: Si scri-

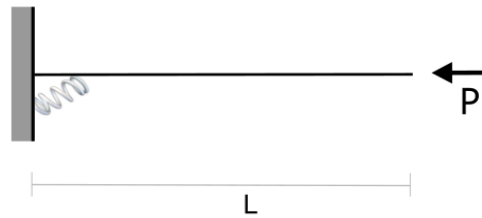


Figura 1.1: Trave incernierata soggetta a carico di punta

va l'equazione dei momenti nella configurazione deformata con spostamenti finiti, scelto come polo la cerniera si ha:

$$Pl \sin \theta - K \theta = 0 \quad \rightarrow \quad Pl \sin \theta = K \theta$$

Allora le posizioni di equilibrio si hanno quando:

$$\theta = 0, \quad \text{indipendente da } P$$

$$\theta \neq 0 \quad P = \frac{K}{l} \frac{\theta}{\sin \theta}$$

Se il carico P è allineato con la cerniera ($\theta = 0$) il sistema si trova in una posizione di equilibrio. Tuttavia la stabilità di questa posizione di equilibrio dipende dall'intensità del carico. Per valori molto grandi di P ($P > K/l$) la posizione di equilibrio è instabile e può assumere altre due diverse configurazioni di equilibrio (stabili) in funzione dell'angolo $\theta \neq 0$ soluzione dell'equazione di equilibrio. Si può analizzare la natura delle posizioni di equilibrio attraverso l'uso dei criteri energetici.

Il punto associato, nello spazio delle configurazioni, al carico critico $P_{cr} = K/l$ rappresenta quindi un punto di biforcazione.

L'instabilità dovuta a un carico assiale di punta agente su un'asta rappresenta un esempio comune di instabilità e prende il nome di *instabilità euleriana*,

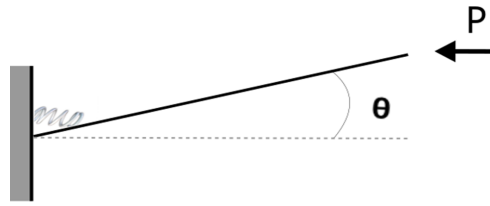


Figura 1.2: Posizione di equilibrio (a)

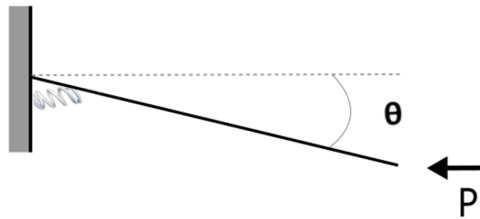


Figura 1.3: Posizione di equilibrio (b)

o in inglese *buckling*. Questo tipo di carico può provocare un improvviso collasso strutturale, anche se l'effettivo sforzo di compressione è minore dello sforzo massimo che il materiale può sostenere.

Per carico di punta assiale si intende una sollecitazione di compressione applicata sulla testa di un'asta. Nella realtà è impossibile che tale sforzo sia uno sforzo normale puro, in quanto molto spesso il punto in cui il carico è applicato non coincide con il baricentro della sezione, ma si trova ad una certa distanza da esso, generando così un momento flettente. Se si considerano strutture "*snelle*" sottoposte a sollecitazioni di questo tipo, esse tendono ad incurvarsi e possono portare, nel caso si raggiunga il punto di rottura, ad un collasso della struttura. Per questo motivo il fenomeno di instabilità al carico di punta è da evitare con grande accortezza. Si potrebbe per esempio intervenire:

- aumentando l'area della sezione;
- riducendo la lunghezza dell'asta;
- riducendo la compressione;
- aggiungendo vincoli con altri elementi strutturali o con il suolo;

Capitolo 2

Cenni storici

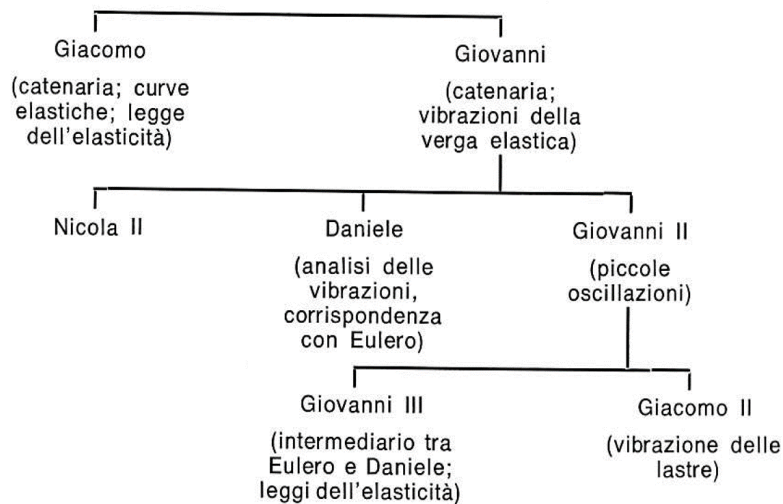


Figura 2.1: Albero genealogico dei matematici che hanno dato un contributo nel campo dell'elasticità

Tra la fine del Seicento e la seconda metà del Settecento, la teoria delle curve elastiche è oggetto di studio dei maggiori esponenti della cultura matematica e meccanica: la famiglia Bernoulli e l'illustre Leonardo Eulero (1707-1783) condividono teorie e intuizioni attraverso assidui scambi epistolari. La domanda alla base di questo studio è quale configurazione debba essere assunta dall'asse di una trave a cui siano applicati dei carichi, ovvero come si dispone la cosiddetta *linea elastica*. "Il problema dell'inflessione o della curvatura di travi, di archi, di elementi (monodimensionali) elastici d'ogni specie, a causa del proprio peso o di un peso ad essi applicato o di qualsiasi altra forza sollecitante", Giacomo Bernoulli, *Acta Eruditorum* (pa-

ragrafo 3), 1691. In particolare è Eulero che analizzando vari aspetti del tema in questione, pone le basi per il calcolo variazionale (per la ricerca dei punti di massimo e minimo delle curve) e per l'analisi non lineare (utilizzata nel caso delle grandi deformazioni delle travi).

2.1 Il contributo di Giacomo Bernoulli

Il casato Bernoulli, originario di Anversa, dà un enorme contributo alla teoria dell'elasticità (Fig. 2.1): spiccano le figure di Giacomo Bernoulli (1654-1705), di suo fratello Giovanni (1667-1748) e del figlio di quest'ultimo Daniele (1700-1782), fondatore della dinamica dei fluidi. Giacomo Bernoulli, in particolare, nasce nel 1654 in Svizzera a Basilea, eccellente centro di ricerca scientifica. È il primo a formulare le equazioni generali che risolvono completamente il problema dell'equilibrio di una fune flessibile soggetta a una qualsiasi distribuzione di forze tangenziali e normali. Nel testo del 1691, sopra citato, Giacomo Bernoulli sottolinea la maggiore difficoltà del problema della verga elastica rispetto a quello della fune precedentemente risolto; impiega, infatti, tre anni prima di esporre il risultato in una memoria degli *Acta Eruditorum* nel 1694.

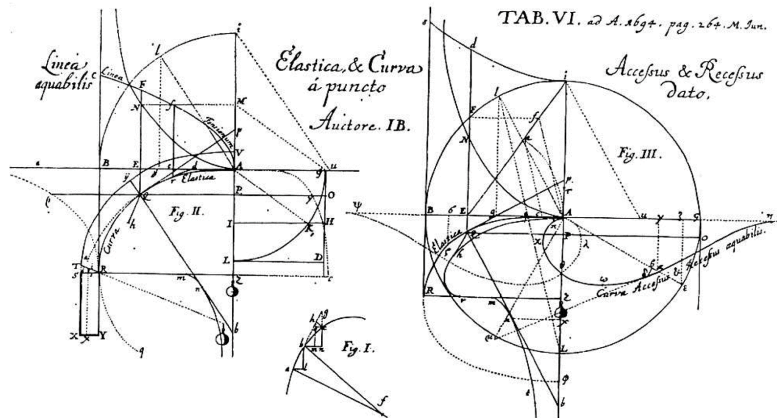


Figura 2.2: Pubblicazione sull'elastica di Giacomo Bernoulli, *Acta Eruditorum*, 1694

La costruzione geometrica su cui si basa il ragionamento è molto complessa (Fig. 2.2), tra le ipotesi che Bernoulli formula rientrano la conservazione delle sezioni piane, la condizione per cui le sezioni trasversali si mantengono ortogonali alla linea d'asse deformata e, infine, la fibra inferiore come neutra, ovvero indeformata. Una notevole semplificazione della dimostrazione

si ottiene considerando una trave di altezza H caricata da un peso Q (Fig. 2.3).

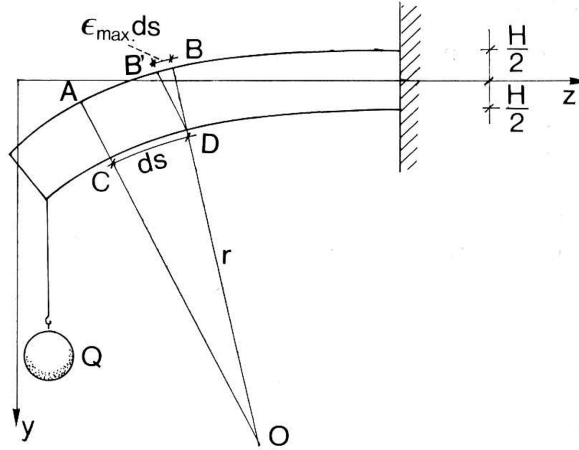


Figura 2.3: Semplificazione della costruzione geometrica in Fig. 2.2

Si considera l'elemento infinitesimo $ABCD$ con CD pari a ds e AB pari a $ds + \varepsilon_{max}ds$. Dalla similitudine tra i triangoli $B'DB$ e COD si può scrivere:

$$B'B : BD = CD : DO, \quad (2.1)$$

dove $B'B = \varepsilon_{max}ds$, dunque, la proporzione diventa

$$\varepsilon_{max}ds : H = ds : r, \quad (2.2)$$

con r pari al raggio di curvatura

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_{max}}{H}. \quad (2.3)$$

È possibile legare la deformazione ε_{max} della fibra superiore alla tensione attraverso la legge di Hooke:

$$\varepsilon_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E}; \quad (2.4)$$

la tensione σ_{max} è correlata, invece, al momento flettente tramite una generica funzione f :

$$\sigma_{max} = f(M). \quad (2.5)$$

Le equazioni che riassumono la teoria di Giacomo Bernoulli sulle curve elastiche possono essere determinate, in conclusione, nel seguente modo:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} = \frac{\sigma_{max}}{HE} \\ \frac{1}{r} = \frac{f(M)}{HE} \end{cases} \quad (2.6)$$

Si noti che tali relazioni (2.6) non sono state dedotte con l'ausilio di considerazioni di equilibrio globale tra le tensioni σ e il momento flettente M .

2.2 La collaborazione tra Leonardo Eulero e Daniele Bernoulli

Il 20 ottobre del 1742 Daniele Bernoulli scrive a Eulero una lettera in cui descrive l'intuizione che si possano ottenere le condizioni di equilibrio per una verga elastica inizialmente rettilinea risolvendo un problema di minimo, ovvero assegnando all'energia potenziale elastica un valore minimo compatibile con i vincoli assegnati sugli spostamenti. "Voi facilmente risolverete tra tutte le curve di ugual lunghezza che non solo passino per A e per B ma anche abbiano in tali punti assegnate pendenze questo problema di determinare quella in cui il valore della seguente espressione

$$\int \frac{ds}{r^2} \quad (2.7)$$

sia minimo".

Si può definire l'energia elastica come il lavoro compiuto dalle caratteristiche di sollecitazione -in questo caso solo il momento flettente- per la corrispondente deformazione.

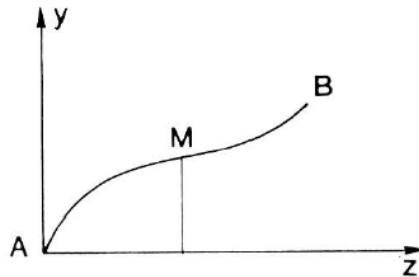


Figura 2.4: Problema di minimo: disegno di Eulero, *Additamentum I*

2.3 Il carico critico euleriano

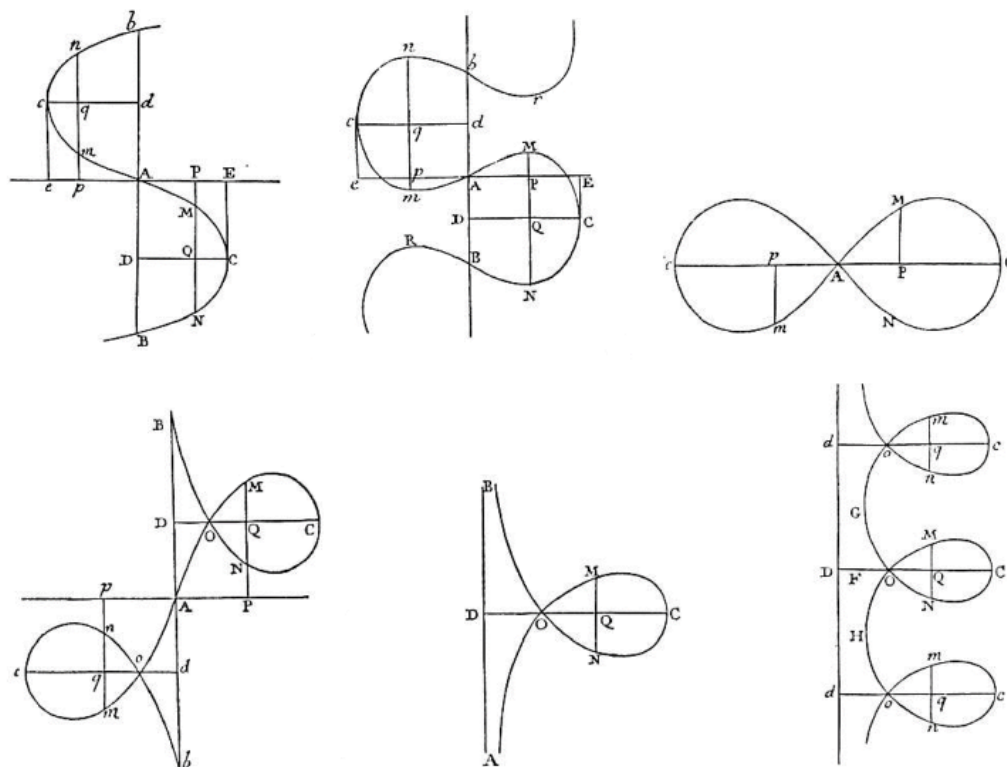


Figura 2.5: Alcune delle curve elastiche enumerate da Eulero: di seconda specie (a), di quarta specie (b), di quinta specie (c), di sesta specie (d), di settima specie (e), di ottava specie (f).

Nei paragrafi 2, 3 e 4 dell'*Additamentum I* Eulero risolve il problema di minimo, mentre nei paragrafi che vanno dal 7 al 13 prepara la strada per il successivo argomento da lui studiato: l'enumerazione delle curve elastiche. Delle nove specie individuate la seconda richiama maggiore interesse, infatti, è possibile sovrapporre al diagramma una trave molto snella incastrata in C e libera in A , dove è caricata da un peso verticale P :

Eulero inverte l'orientamento dell'asse y rispetto al riferimento iniziale in modo che sia concorde con il verso di P . In particolare risulterà che:

$$P = \frac{2EI}{a^2}, \quad (2.8)$$

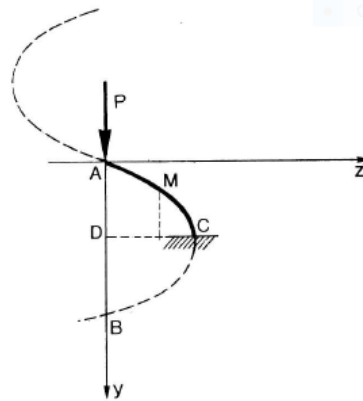


Figura 2.6: Trave snella incastrata in C e libera in A, caricata da un peso verticale P

dove EI rappresenta la rigidezza flessionale (Capitolo 3.2). La distanza AD è pari a $\pi a/2\sqrt{2}$ e differisce poco dalla lunghezza della curva, in quanto l'angolo DAM è piccolissimo, dunque, si ha:

$$l = AD = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}. \quad (2.9)$$

Per indurre "la curvatura infinitamente piccola della lamina (l) occorre una forza P di grandezza finita e precisamente

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}}. \quad (2.10)$$

È stato introdotto per la prima volta in modo rigoroso e formale il concetto di *carico critico euleriano*: una trave elastica snella incastrata-libera soggetta a un carico assiale di compressione può inflettersi, a patto che il carico superi il valore critico della (2.10) e, in corrispondenza di tale carico critico, può inflettersi "infinitamente" poco rispetto alla configurazione rettilinea. Eulero riflette sul risultato trovato e ne avverte l'importante significato strutturale. Il paragrafo 37 dell'*Additamentum* ha come titolo "*Sulla forza delle colonne*" e vi si legge "Le cose che sono state annotate possono riuscir utili a giudicare le sollecitazioni delle colonne. Sia data, infatti, la colonna AB fissata verticalmente sulla base A , portante il peso P ." La colonna, prosegue Eulero, è progettata in modo da non potersi rompere a causa di P , di conseguenza, l'unica cosa da temere è la sua inflessione. Se il carico da sopportare risulta inferiore al P_{cr} - o equivalentemente P_E - non si deve temere alcuna inflessione, in caso contrario, la colonna non potrà resistere all'inflessione. Essendo

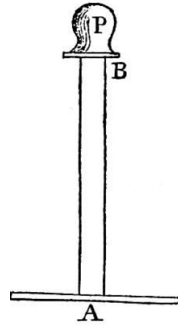


Figura 2.7: Colonna fissata sulla base A , portante il peso P

costanti l'elasticità e la sezione trasversale, il peso P che può essere portato senza pericolo è inversamente proporzionale al quadrato della lunghezza della colonna, quindi, una colonna lunga il doppio può portare solo $1/4$ di quel peso.

La generalità della teoria di Eulero è preziosa per indagare il fenomeno in presenza di grandi spostamenti. Ci si può chiedere per quale valore del carico assiale P si possa conferire alla trave incastrata-libera un'inflexione tale che l'estremo libero B ruoti di un angolo assegnato φ_b : non è possibile attenersi alla teoria linearizzata e occorre risalire all'impostazione di Eulero o a una equivalente. Si noti che al crescere dell'angolo φ_b , aumenta il carico P necessario (Fig. 2.10).

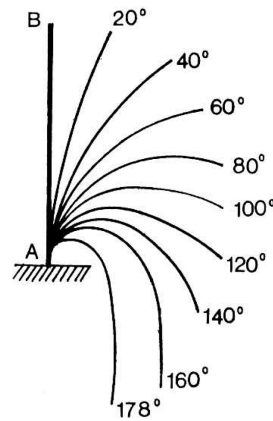


Figura 2.8: Inflexione della trave al variare del carico applicato P

φ_B	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	178°	180°
P/P_{cr}	1,0153	1,0636	1,1518	1,2939	1,5184	1,8848	2,5424	4,0301	11,971	∞

Figura 2.9: Andamento del carico critico P_E in funzione dell'angolo φ_b

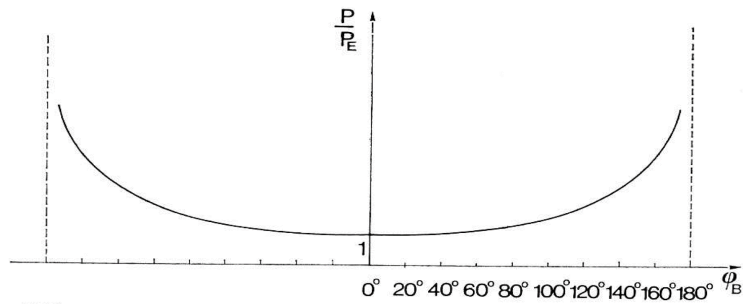


Figura 2.10: Grafico del carico critico P_E in funzione dell'angolo φ_b

2.4 Determinazione delle equazioni indefinite di equilibrio: Metodo di Eulero

Si consideri una trave piana rettilinea sottoposta lungo la linea d'asse all'azione di forze esterne distribuite $\mathbf{f}(s)$ di componenti: $f_n(s)$ (carico distribuito trasversale) e $f_t(s)$ (carico distribuito assiale).

Si assuma poi che gli spostamenti e le rotazioni dovuti all'applicazione di queste forze non siano trascurabili e che il problema dell'equilibrio debba studiarsi facendo riferimento alla configurazione deformata.

Si vogliono ricavare le relazioni differenziali che esprimono l'equilibrio tra le forze esterne e le caratteristiche della sollecitazione.

Consideriamo una porzione infinitesima ds di trave con raggio di curvatura pari ad r . Su di essa agiscono le sollecitazioni interne N, T, M -sforzo normale, sforzo di taglio e momento flettente- con il loro incremento lungo le s crescenti e le forze distribuite $\mathbf{f}ds$ con componenti $f_n ds$ e $f_t ds$.

Se la trave è in equilibrio lo è ogni sua parte, quindi anche l'elemento infinitesimo da noi studiato.

L'equilibrio delle forze sopra descritte lungo le direzioni assiale e trasversale, e l'equilibrio alla rotazione rispetto ad un polo prestabilito sono espresse dalle equazioni:

$$\begin{cases} N + dN - N \cos d\varphi + T \sin d\varphi + f_t ds \cos d\frac{\varphi}{2} = 0 \\ T + dT - T \cos d\varphi - N \sin d\varphi + f_n ds \cos d\frac{\varphi}{2} = 0 \\ M + dM - M - T ds \cos d\varphi = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Dove nel calcolo dei momenti vengono trascurati gli infinitesimi di ordine superiore al primo. Poiché l'angolo $d\varphi$ legato alla curvatura della trave è un infinitesimo valgono le seguenti approssimazioni:

$$\cos d\varphi \simeq 1 \quad (2.12)$$

$$\sin d\varphi \simeq d\varphi \quad (2.13)$$

Semplificando le precedenti equazioni si può scrivere:

$$\begin{cases} dN + Td\varphi + f_t ds = 0 \\ dT - Nd\varphi + f_n ds = 0 \\ dM - Tds = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Infine introducendo la relazione che lega il raggio di curvatura r all'angolo infinitesimo $d\varphi$:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds} \quad (2.15)$$

Si ottengono le equazioni indefinite di equilibrio:

$$\begin{cases} \frac{dN}{ds} + \frac{T}{r} + f_t = 0 \\ \frac{dT}{ds} - \frac{N}{r} + f_n = 0 \\ \frac{dM}{ds} = T. \end{cases} \quad (2.16)$$

Capitolo 3

Teoria delle funzioni ellittiche

3.1 Introduzione

In questa sezione si vuole introdurre la teoria degli integrali ellittici e delle funzioni che li risolvono. Tali funzioni prendono il nome di *funzioni ellittiche* ed hanno la particolarità di non essere algebriche.

Le funzioni si definiscono algebriche quando sono espresse attraverso: i quattro segni delle operazioni, l'estrazione da radice ennesima e/o l'elevamento a potenza. Tutte le funzioni che non sono algebriche vengono definite *trascendenti*, nel campo reale sono funzioni che contengono espressioni trigonometriche, logaritmiche e/o esponenziali.

Nel campo complesso con trascendente si indica una funzione che presenta almeno una *singolarità essenziale*.

Generalmente, in matematica, con singolarità (isolata) si intende un punto in cui la funzione non è definita. In base al comportamento della funzione in quel punto abbiamo diversi tipi di singolarità: eliminabili, polari o essenziali. Una singolarità isolata è polare se il punto in cui la funzione non è definita z_0 è un polo, ovvero è valido il seguente limite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty,$$

invece una singolarità è detta eliminabile se nel punto z_0 il limite esiste ed è finito :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = l,$$

ed infine è detta essenziale se non rientra nei casi precedenti, non esiste tale limite.

Inoltre il termine *trascendente intera* è spesso usato nel campo complesso per indicare una funzione che presenta un'unica singolarità essenziale in $z = \infty$.

Queste nozioni saranno utili in seguito per comprendere meglio la teoria che si vuole presentare.

Risolvere un integrale indefinito significa individuare una funzione primitiva $F(x)$, la cui derivata sia uguale alla funzione che si sta integrando $f(x)$. In formule:

$$F(x) = \int f(x) \quad F(x)' = f(x),$$

questa nozione può estendersi anche al campo complesso, in particolar modo nel seguente studio si trattano gli integrali Abeliani.

Gli integrali Abeliani sono integrali definiti nel piano complesso con la seguente forma:

$$\int R(x, w)dx,$$

dove $R(x, w)$ è una funzione razionale arbitraria nelle variabili complesse x e w .

Una funzione $R(x, w)$ si dice razionale se è esprimibile come rapporto di due polinomi. Le funzioni razionali si dividono in: intere e fratte. Nelle prime il polinomio al denominatore ha grado nullo, nelle seconde il denominatore ha grado non nullo. Con il grado di un polinomio si indica il massimo dei gradi dei monomi, cioè il monomio la cui somma tra i gradi delle varie lettere risulta maggiore.

Le variabili x e w dell'integrale Abeliano sono legate tra loro dall'equazione:

$$F(x, w) = 0,$$

dove $F(x, w)$ è un polinomio irriducibile nella variabile w . Con polinomio irriducibile si intende un polinomio divisibile solamente per uno e per se stesso. $F(x, w)$ ha la seguente forma:

$$F(x, w) = a_n(x)w^n + \dots + a_1(x)w + a_0(x),$$

dove i coefficienti $a_j(x)$, con $j = 0, 1, \dots, n$, sono funzioni razionali nella variabile x .

Si consideri ora la funzione razionale $f(x, y)$ e il seguente integrale Abeliano:

$$\int f(x, \sqrt{P(x)})dx,$$

dove il termine $P(x)$ è un polinomio razionale intero in x , si definisce razionale intero un polinomio a cui è associata una funzione razionale intera.

Il grado di tale polinomio, inteso come il grado del suo numeratore, determina la tipologia di integrale.

Se $P(x)$ è un polinomio di primo o secondo grado l'integrale si definisce integrale irrazionale. Questi integrali si risolvono attraverso delle opportune sostituzioni: si introduce una nuova variabile, detta ausiliaria, che riconduce l'integrale a quello di una funzioni nota: trascendenti note (funzioni che contengono logaritmi, esponenziali e/o funzioni della trigonometria) o funzioni algebriche.

Se $P(x)$ supera il secondo grado la $F(x)$ che risolve l'integrale diventa una trascendente che non è più nota.

Nel seguente studio andremo ad analizzare i casi in cui il grado del polinomio è pari a 3 o 4, in tal caso l'integrale prende il nome di *integrale ellittico*. Il nome è dovuto al fatto che il problema della risoluzione di questo integrale venne incontrato per la prima volta durante il calcolo della lunghezza di un arco di ellisse.

Gli integrali dove il polinomio $P(x)$ ha un grado maggiore al quarto prendono il nome di *superellittici*, ma non verranno trattati nel seguente studio.

Il problema degli integrali ellittici ha avvicinato molti importanti matematici che hanno contribuito all'avanzamento del loro studio quali Eulero, Bernoulli, Legendre e molti altri. Di fondamentale importanza è lo studio effettuato da Jacobi e Abel, la loro idea fu quella di espandere lo studio ai valori complessi delle variabili e di studiare le funzioni che nascono dall'inversione degli integrali stessi.

Per comprendere meglio si consideri l'integrale:

$$y = \int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

la cui soluzione è la funzione $y = \arccos x$, in questo caso studiare la variabile y in funzione di x risulta svantaggioso rispetto allo studio della x in funzione della y . Infatti la funzione inversa associata $x = \cos y$ presenta caratteristiche più semplici: è uniforme e periodica del suo argomento, a differenza della funzione infinitiforme che avevamo in precedenza.

Il medesimo ragionamento è valido per gli integrali ellittici. Questi vengono classificati alla forma in cui si presentano, si possono avere quindi integrali ellittici di: *prima specie* (3.1a), *seconda specie* (3.1b) e *terza specie* (3.1c):

$$y = \int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (3.1a)$$

$$y = \int \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad (3.1b)$$

$$y = \int \frac{1}{1-nt^2} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (3.1c)$$

dove k rappresenta una costante e n , definita come *caratteristica*, può assumere qualsiasi valore in maniera indipendente dagli altri argomenti.

Compresa l'importanza dello studio delle funzioni inverse e utilizzando l'analisi complessa, Jacobi introdusse la prima funzione ellittica, ovvero la funzione x di y , che nasce dall'inversione dell'integrale di prima specie, da lui chiamata:

$$\operatorname{sen} am y \text{ (seno amplitudine),}$$

questa funzione è uniforme su tutto il piano complesso, quindi definita nello stesso modo su tutto il piano, con sole singolarità polari. Inoltre la funzione *seno amplitudine* è doppiamente periodica ovvero è periodica rispetto due periodi che devono essere tra loro incommensurabili, i motivi verranno in seguito spiegati meglio.

Le altre e due funzioni che vengono introdotte da Jacobi sono della stessa natura della prima e sono definite come:

$$\operatorname{cos} am y = \sqrt{1 - \operatorname{sen} am^2 y} \text{ (coseno amplitudine),}$$

$$\Delta am y = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen} am^2 y} \text{ (delta amplitudine),}$$

rispettivamente le funzioni *coseno amplitudine* e *delta amplitudine*.

Le tre funzioni introdotte sono funzioni ellittiche: funzioni a variabile complessa, uniformi in tutto il piano con singolarità polari a distanza finita e doppiamente periodiche.

Queste funzioni diventano infinite negli stessi punti, ovvero hanno gli stessi poli. Allora, non avendo singolarità essenziali, le funzioni di Jacobi possono esprimersi attraverso quozienti di trascendenti intere utilizzando il Teorema di Weierstrass (vedi Bianchi in "Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche" Vol.1 capitolo VI §66):

Dati ad arbitrio un numero infinito di punti, che abbiano per unico punto limite il punto $z = \infty$, si può sempre costruire una trascendente intera, che si annulli soltanto nei punti dati:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

con ordini¹ corrispondenti assegnati ad arbitrio:

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$$

la trascendente intera $G(z)$ cercata è:

$$G(z) = e^{G_1(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{a_n} \right)^{p_n} e^{Q_{m_n}(z)} \right],$$

dove $G_1(z)$ è arbitrario e $Q_{m_n}(z)$ viene introdotto per far convergere la serie. Di conseguenza ad una funzione $w(z)$ con singolarità polari, uniforme su tutto il piano, che non presenta singolarità essenziali, può essere associata una trascendente intera. I poli di $w(z)$ sono infatti un gruppo di punti $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ con il punto limite $z = \infty$, e ogni polo ha il suo ordine $(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$.

Per ordine di un polo z_0 , di una funzione $f(z)$, si intende il numero naturale n di termini che compongono la parte principale della serie di Laurent (ovvero la rappresentazione della funzione come serie di potenze). Analogamente l'ordine del polo è il valore dell'esponente h (con $h > 0$) tale per cui il seguente limite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^h = l_h$$

esiste, è finito ed è diverso da 0.

Alle tre funzioni di Jacobi associamo tre funzioni trascendenti che prendono il nome di funzioni θ .

Gli infinitesimi di queste trascendenti, ovvero i punti in cui la funzione si annulla, sono disposti in maniera doppiamente periodica, sebbene tali funzioni non presentino più periodicità.

Le nuove funzioni hanno lo stesso denominatore e si riducono a un'unica trascendente attraverso la quale possono esprimersi tutte le funzioni della teoria degli integrali ellittici.

La teoria di Jacobi è stata in seguito perfezionata da Weierstrass, che alle tre funzioni, introdotte in precedenza, ha sostituito un'unica funzione:

$$\wp u,$$

¹Per ordine di un infinitesimo z_0 , di una funzione $f(z)$ si intende il numero naturale n tale per cui il seguente limite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^n} = L,$$

esiste, è finito ed è diverso da zero. L'ordine esprime la rapidità con cui la funzione converge a zero, più alto sarà l'ordine maggiore sarà la rapidità della convergenza.

che prende il nome di funzione ellittica di Weierstrass. Per mezzo della $\wp u$ e delle sue derivate possiamo esprimere tutte le funzioni ellittiche nell'argomento u . Alla funzione theta viene sostituita la trascendente intera σu , con proprietà simili, ma più semplici. Nella teoria di Weierstrass attraverso la σu si esprimono tutte le funzioni e gli integrali ellittici.

3.2 Costruzione della σu

Per comprendere al meglio la teoria è conveniente iniziare dalla determinazione della funzione σu e ricavare poi le altre funzioni della teoria di Weierstrass.

Si consideri inizialmente la funzione seno nel campo complesso:

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j},$$

dove j rappresenta l'unità immaginaria. Questa funzione è un esempio di trascendente intera che ha le proprie radici distribuite con intervalli regolari sull'asse dei reali (vedi Greco in "Complementi di Analisi" capitolo IV § 3 pag.67).

Un altro esempio di trascendente intera è la funzione:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2\omega}\right),$$

dove ω rappresenta una costante complessa e z è la variabile complessa della funzione. Questa trascendente ha ancora i suoi infinitesimi disposti ad intervalli regolari, ma sulla retta che passa per l'origine del piano e il punto 2ω . Tali punti sono rappresentati dalla formula:

$$z_0 = m 2\omega,$$

con m numero reale intero positivo o negativo.

La funzione di argomento complesso σu , che verrà in seguito introdotta, ha caratteristiche analoghe, ma i suoi infinitesimi hanno la particolarità di essere doppiamente periodici. Indichiamo con ω e ω' due costanti complesse e l'insieme dei punti definiti dalla formula:

$$u_0 = m 2\omega + n 2\omega', \tag{3.2}$$

dove m e n sono due reali interi. Si vuole costruire una trascendente intera che diventi infinitesima in tutti i punti definiti dalla (3.2).

Si deve precisare che i periodi ω e ω' devono essere in rapporto complesso, quindi il loro rapporto deve essere un numero complesso. Infatti se i due numeri fossero commensurabili tra loro, quindi il loro rapporto fosse un numero razionale reale o un numero intero, allora ω e ω' sarebbero multipli di uno stesso periodo fondamentale 2Ω . Per dimostrare quanto appena affermato, si supponga di avere il seguente rapporto di due generici numeri complessi:

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\alpha + j\beta}{\alpha' + j\beta'} = \frac{m}{n}, \quad \text{con } \alpha, \beta, \alpha', \beta', m, n \in \mathbb{Z}$$

la precedente affermazione è valida solamente se è possibile scrivere il rapporto come:

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{m(\gamma + j\delta)}{n((\gamma + j\delta))} = \frac{m}{n} \quad \text{con } \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$$

allora se il rapporto dei due periodi è un numero reale, essi sono multipli del periodo fondamentale $\Omega = \gamma + j\delta$. Si può concludere che l'insieme dei punti della (3.2) diventerebbe:

$$u_0 = m 2\omega + n 2\omega' = \bar{n} 2\Omega,$$

con \bar{n} numero intero reale. Lo stesso ragionamento è valido se il rapporto m/n si può ridurre ad numero intero reale l : i due periodi sono ancora multipli di uno stesso periodo fondamentale 2Ω , ma in questo caso particolare l'intero m è un multiplo dell'intero n .

Quindi, per quanto sopra illustrato, la funzione che si sta cercando sarebbe una funzione che si annulla in numero infinito di punti, quindi una trascendente, con gli infinitesimi distribuiti in maniera periodica, quindi una funzione trigonometrica. Questa funzione sarebbe allora:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi u}{2\Omega}\right),$$

ovvero una trascendente intera con gli infinitesimi distribuiti ad intervalli regolari sulla retta che passa per il punto 2Ω e l'origine.

Si può quindi affermare che il rapporto dei periodi deve essere un numero complesso:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \alpha + j\beta \quad \beta \neq 0,$$

La coppia di numeri complessi ω e ω' , così introdotta, viene definita *coppia fondamentale di periodi* e nel piano complesso può identificarsi come una coppia di vettori in \mathbb{R}^2 linearmente indipendenti (non esprimibili l'uno come combinazione lineare dell'altro). I due vettori generano nel piano un reticolo, ovvero un insieme parzialmente ordinato in cui ogni coppia di elementi

presenta un estremo superiore ed un estremo inferiore, vedi Fig.(3.1).
Tale reticolo viene definito come:

$$\Lambda = \{ n\omega + m\omega' \mid m, n \in \mathbb{Z} \},$$

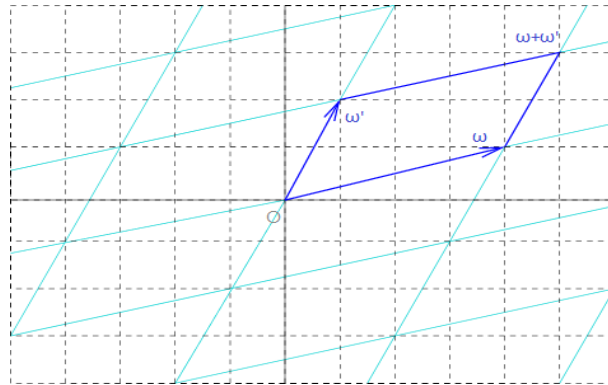


Figura 3.1: Reticolo generato da ω e ω' (in celeste), parallelogramma fondamentale (in blu)

Il parallelogramma formato dai vertici:

$$0, \omega, \omega + \omega', \omega',$$

sarà definito *parallelogramma fondamentale* e i due generatori ω e ω' sono detti basi del reticolo.

Si noti che una coppia fondamentale genera un solo reticolo, mentre un reticolo può essere generato da infinite coppie fondamentali. Con riferimento alla figura precedente, Fig.(5.1), si può notare che il reticolo generato dalla coppia (ω, ω') è lo stesso generato dalle coppie $(\omega, -\omega')$ o $(-\omega, \omega')$ o più generalmente, da una delle coppie che genera uno dei parallelogrammi del reticolo.

Pertanto si scelgano le basi del reticolo tali per cui $\beta > 0$.

La scelta di prendere positivo il coefficiente immaginario del rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ ($\beta > 0$), comporta che percorrendo il contorno dl parallelogrammo nel verso positivo, ovvero nel verso antiorario, si incontrano i vertici nell'ordine sopra indicato. Gli infinitesimi di primo ordine della trascendente, ovvero i punti della (3.2), sono i vertici del reticolo generato dalla coppia fondamentale 2ω e $2\omega'$ e saranno periodici lungo le due direzioni 2ω e $2\omega'$, quindi doppiamente periodici.

La distanza di tali infinitesimi è sempre maggiore della quantità più piccola

tra 2ω , $2\omega'$, $2\omega + 2\omega'$, $2\omega - 2\omega'$, cioè le distanze tra i vertici del parallelogramma fondamentale. Se la distanza degli infinitesimi si mantiene sempre maggiore di una quantità fissa, allora (vedi Bianchi in "Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa" Vol.1 capitolo 6 §69) la σu è definita come:

$$\sigma u = u \prod_{m,n}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{2m\omega + 2n\omega'}\right) e^{\frac{u}{2m\omega + 2n\omega'} + \frac{u^2}{2(2m\omega + 2n\omega')^2}},$$

il doppio prodotto infinito è esteso a tutti i valori interi positivi e negativi di m e n , con l'esclusione della combinazione $m = 0$, $n = 0$.

La trascendente intera σu dipende, oltre che dalla variabile complessa u , anche dalle due costanti complesse 2ω e $2\omega'$, che si dicono *periodi*.

Introducendo $w = 2m\omega + 2n\omega'$, si può riscrivere la σu come:

$$\sigma u = u \prod_{m,n}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}},$$

tale trascendente ha la particolarità di essere uniforme su tutto il piano complesso e di essere una funzione dispari. Una funzione complessa $f(z)$ si definisce dispari quando:

$$f(-z) = -f(z),$$

allora la funzione σu di Weierstrass è una funzione dispari, in quanto:

$$\sigma(-u) = -u \prod_{m,n}^{\infty} \left(1 + \frac{u}{w}\right) e^{-\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}} = -\sigma u,$$

infatti la produttoria infinita non cambia il suo valore se varia il segno di m e n , ovvero variando il segno di w .

3.3 Costruzione delle funzioni ζu , $\wp u$ e $\wp' u$

Si vuole ora introdurre un'altra importante funzione della teoria degli integrali ellittici la derivata logaritmica della trascendente intera σu (vedi Greco in "Complementi di analisi" capitolo IV §5 e Krantz, S. G. "The Complex Derivative" §1.3.5), che viene denominata da Weierstrass ζu :

$$\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u},$$

questa funzione è ancora una funzione dispari ed è interessante notare come i punti $u_0 = 2m\omega + 2n\omega'$, infinitesimi della funzione σu , siano per questa funzione dei poli del primo ordine.

Questa affermazione è ben visibile considerando l'espressione analitica della ζu che si ottiene con la derivata logaritmica della σu . Si può effettuare la derivata logaritmica di una funzione in due modi: differenziare la funzione e poi dividerla per la funzione non differenziata o calcolare il logaritmo della funzione e poi dividerla per l'argomento (vedi Greco in "Complementi di analisi" capitolo IV §5). In questo caso è conveniente calcolare il logaritmo della funzione σu e poi derivare il risultato rispetto all'argomento. Così facendo il logaritmo della funzione σu trasforma i prodotti in serie e derivando rispetto ad u si ottiene:

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \sum_{m,n}^{\infty} \left(\frac{1}{u - (2m\omega + 2n\omega')} + \frac{1}{2m\omega + 2n\omega'} + \frac{u}{(2m\omega + 2n\omega')^2} \right),$$

la sommatoria infinita è estesa a tutti i valori di m e n con l'esclusione della combinazione $m = 0, n = 0$.

Se si deriva ζu e la si cambia di segno, si ottiene una funzione di fondamentale importanza nella teoria delle funzioni ellittiche di Weierstrass:

$$\wp u = -\zeta' = -\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2}.$$

Si può subito notare che a differenza delle funzioni σu e ζu , la funzione $\wp u$ è una funzione pari:

$$\wp(-u) = \wp u,$$

quindi attraverso la derivata della funzione ζu , cambiata di segno, si ha:

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum_{m,n} \left\{ \frac{1}{(u - 2m\omega - 2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^2} \right\},$$

per comprendere meglio la teoria degli integrali ellittici però è importante introdurre anche la funzione $\wp' u$, che si ottiene derivando nuovamente la funzione \wp :

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3} - 2 \sum_{m,n} \frac{1}{(u - 2m\omega - 2n\omega')^3},$$

anche in questo la sommatoria si estende a tutti i valori interi di m e n , con l'esclusione della combinazione $m = 0$ e $n = 0$. Se si include questa combinazione nella serie, si può riscrivere l'equazione della $\wp' u$ come:

$$\wp' u = -2 \sum_{m,n} \frac{1}{(u - 2m\omega - 2n\omega')^3},$$

si noti che la $\wp' u$ è una funzione dispari, infatti la $\wp u$ e tutte le derivate di ordine pari $\wp'' u, \wp^{IV} u, \dots$ sono funzioni pari, al contrario le derivate dispari $\wp''' u, \wp^V u, \dots$ sono funzioni dispari.

Le funzioni introdotte sono funzioni *meromorfe* su un sottoinsieme aperto del piano complesso, ovvero funzioni *olomorfe* su tutto il sottoinsieme con l'esclusione di un insieme di punti che sono per la funzione dei poli. Una funzione si dice *olomorfa* su un sottoinsieme aperto se è definita in esso e differenziabile in senso complesso in ogni punto del dominio.

Entrambe le serie introdotte hanno convergenza assoluta (ovvero la serie dei valori assoluti converge), con l'esclusione dei punti:

$$u_0 = 2m\omega + 2n\omega',$$

dove $\wp u$ e $\wp' u$ assumono valore infinito. Nell'espressione della $\wp' u$ si nota un aspetto cruciale della teoria di Weierstrass, se si sostituisce la u con $u + 2\omega$, o con $u + 2\omega'$, non si altera il valore della serie, ma si cambia solamente l'ordine dei termini, allora:

$$\begin{cases} \wp'(u + 2\omega) = \wp' u, \\ \wp'(u + 2\omega') = \wp' u \end{cases} \quad (3.3)$$

che possono essere scritte come:

$$\wp'(u + 2m\omega + 2n\omega') = \wp' u,$$

ovvero la funzione è *doppiamente periodica* con periodi fondamentali 2ω e $2\omega'$, questa proprietà anche se meno evidente è posseduta anche dalla $\wp u$ e tutte le sue derivate.

Infatti integrando la (3.3) si ha:

$$\begin{cases} \wp(u + 2\omega) - \wp u, = c, \\ \wp(u + 2\omega') - \wp u, = c', \end{cases}$$

con c e c' costanti di integrazione, se si valutano le due equazioni rispettivamente nei punti $u = -\omega$ e $u = -\omega'$ si ottiene:

$$\wp(-\omega) - \wp u, = c,$$

$$\wp(-\omega') - \wp u, = c,$$

essendo $\wp u$ una funzione pari, si ricava il valore delle costanti $c = c' = 0$ allora:

$$\begin{cases} \wp(u + 2\omega) = \wp u, \\ \wp(u + 2\omega') = \wp u, \end{cases}$$

quindi anche la funzione $\wp u$ è doppiamente periodica:

$$\wp(u + 2\omega + 2\omega') = \wp u.$$

Si può concludere che la funzione $\wp u$ di Weierstrass e le sue derivate sono funzioni uniformi in tutto il piano complesso e doppiamente periodiche con periodi fondamentali 2ω e $2\omega'$.

Se si costruisce il parallelogramma fondamentale della funzione $\wp u$ si hanno come vertici i punti $u_o = 2m\omega + 2n\omega'$, dove la funzione ha dei poli del secondo ordine.

Conoscendo gli infinitesimi e i poli della funzione $\wp' u$, essa si può esprimere per la σu (vedi Bianchi in "Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa" Vol.2 capitolo 9 §100) come:

$$\wp' u = C \frac{\sigma(u - \omega)\sigma(u - \omega')\sigma(u + \omega + \omega')}{\sigma^3 u},$$

per il calcolo della costante C si moltiplica per u^3 e si calcola il limite per $u \rightarrow 0$ e si ottiene:

$$C = -\frac{2}{\sigma\omega\sigma\omega'\sigma(\omega + \omega')},$$

sostituendo,

$$\wp' u = -2 \frac{\sigma(u - \omega)\sigma(u - \omega')\sigma(u + \omega + \omega')}{\sigma\omega\sigma\omega'\sigma(\omega + \omega')\sigma^3 u},$$

se in questa si cambia la u in $-u$ e la si moltiplica per la stessa non cambiata si ottiene:

$$\wp'^2 u = 4 \frac{\sigma(\omega - u)\sigma(\omega + u)}{\sigma^2\omega\sigma^2 u} \cdot \frac{\sigma(\omega' - u)\sigma(\omega' + u)}{\sigma^2\omega'\sigma^2 u} \cdot \frac{\sigma(\omega + \omega' - u)\sigma(\omega + \omega' + u)}{\sigma^2(\omega + \omega')\sigma^2 u}, \quad (3.4)$$

introducendo la formula fondamentale (vedi Bianchi in "Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa" Vol.2 capitolo 9 §102):

$$\wp u - \wp v = \frac{\sigma(u + v)\sigma(u - v)}{\sigma^2 u \sigma^2 v}$$

si può riscrivere la (3.4) come:

$$\wp'^2 = 4(\wp u - \wp\omega)(\wp u - \wp\omega')(\wp u - \wp(\omega + \omega')),$$

ed ottenere una relazione fondamentale, nella teoria degli integrali ellittici, tra la $\wp u$ e $\wp' u$.

introduciamo e_1 , e_2 e e_3 definiti come:

$$e_1 = \wp\omega \quad e_2 = \wp\omega' \quad e_3 = \wp(\omega + \omega'),$$

Figura 3.2: Nel grafico di sinistra si riportano sugli assi alla base la parte reale e la parte immaginaria dell'argomento u , sul terzo asse, invece, si riporta la parte reale di $\wp u$. Nel grafico di destra si riportano sugli assi alla base la parte reale e la parte immaginaria dell'argomento u , sul terzo asse, invece, si riporta la parte immaginaria di $\wp u$.

Figura 3.3: Nel grafico di sinistra si riportano sugli assi alla base la parte reale e la parte immaginaria della variabile u , sul terzo asse si riporta il modulo della funzione $\wp u$. Nel grafico a destra si riporta sull'asse orizzontale il valore della variabile reale x e sull'asse verticale il valore assunto dalla $\wp u$

l'equazione può essere anche espressa nella forma canonica come:

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

dove g_2 e g_3 sono gli *invarianti* della $\wp u$, il loro nome è dovuto al fatto che rimangono gli stessi anche cambiando il valore dei periodi, a patto che, con periodi diversi, si costruisca la stessa $\wp u$. Due funzioni $\wp u$ possono essere costruite attraverso periodi diversi e coincidere se il loro periodi sono legati da una trasformazione lineare ed omogenea:

$$\begin{cases} \omega = \alpha\Omega + \beta\Omega' \\ \omega' = \gamma\Omega + \delta\Omega' \end{cases}$$

se i coefficienti α , β , γ e δ sono interi, e il determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, allora i poli $2n\omega + 2m\omega'$ coincidono, salvo per l'ordine, con i poli $2n\Omega + 2m\Omega'$. Quindi in tal caso le $\wp u$ coincidono e di conseguenza i loro invarianti g_2 e g_3 . Il valore degli invarianti è dato da:

$$g_2^o = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1), \quad g_3^o = 4e_1e_2e_3.$$

Le funzioni $\wp[u; \{g_2, g_3\}]$ e $\wp'[u; \{g_2, g_3\}]$, calcolati gli invarianti, possono essere rappresentate graficamente.

Si riportano i grafici delle funzioni \wp e \wp' calcolati attraverso l'uso di "Mathematica". Per la rappresentazione grafica delle due figure si sono scelti gli invarianti $g_2 = 4$ e $g_3 = 0$.

Figura 3.4: Nel grafico di sinistra si riportano sugli assi alla base la parte reale e la parte immaginaria dell'argomento u , sul terzo asse, invece, si riporta la parte reale di $\wp' u$. Nel grafico di destra si riportano sugli assi alla base la parte reale e la parte immaginaria dell'argomento u , sul terzo asse, invece, si riporta la parte immaginaria di $\wp' u$.

Figura 3.5: Nel grafico di sinistra si riportano sugli assi alla base la parte reale e la parte immaginaria della variabile u , sul terzo asse si riporta il modulo della funzione $\wp' u$. Nel grafico a destra si riporta sull'asse orizzontale il valore della variabile reale x e sull'asse verticale il valore assunto dalla $\wp' u$.

3.4 Applicazioni della teoria delle funzioni ellittiche

Una delle applicazioni della teoria delle funzioni ellittiche è quella di risolvere l'equazione differenziale:

$$\left(\frac{dw}{du}\right)^2 = P(w), \quad (3.5)$$

dove $P(w)$ è un polinomio in w . Sebbene lo studio possa essere effettuato anche con un polinomio di quarto grado, massimo grado per rimanere nella teoria degli integrali ellittici, se si superasse tale grado lo studio riguarderebbe l'analisi degli integrali superellittici, nel presente studio si analizza il caso in cui $P(w)$ sia di terzo grado:

$$P(w) = a_0w^3 + 3a_1w^2 + 3a_2w + a_3.$$

La (3.5) può anche nascere dall'inversione dell'integrale ellittico:

$$u = \int \frac{dw}{\sqrt{P(w)}},$$

in tal caso per ricondurre il differenziale ellittico $\frac{dw}{\sqrt{P(w)}}$ alla forma canonica di Weierstrass:

$$\frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2s - g_3}},$$

si dovrà effettuare la trasformazione lineare:

$$w = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{4}{a_0}s,$$

così da ottenere il polinomio nella forma $4s^3 - g_2s - g_3$.

Effettuate le sostituzioni ci si riconduce alla forma:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2s - g_3, \quad (3.6)$$

Ricordando che la funzione $\wp u$ soddisfa la seguente equazione differenziale:

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

si può notare come la funzione di Weierstrass sia la soluzione generale dell'equazione differenziale (3.6), infatti sostituendo in essa $s = \wp(z)$ si ottiene:

$$\left(\frac{d(\wp(z))}{du}\right)^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3,$$

svolgendo i calcoli si ottiene,

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 1,$$

le cui soluzioni sono $z = \pm u + u_0$, per cui $s = \wp(\pm u + u_0)$, ma essendo la funzione \wp una funzione pari, si può concludere:

$$s = \wp(u + u_0; g_2g_3),$$

dove u_0 è una costante e si determina per $u = 0$. Inoltre si mettono in evidenza anche gli invarianti che caratterizzano la funzione, il valore di g_2 e g_3 si può calcolare conoscendo le radici dell'equazione di terzo grado nella variabile s .

Capitolo 4

Equilibrio di una trave elastica

4.1 Introduzione

Si vogliono analizzare le equazioni che caratterizzano la trave elastica utilizzando la teoria formulata da Kirchhoff. Tale teoria è applicabile a travi le cui deformazioni rispetto alla configurazione di riferimento sono “piccole”, mentre le rotazioni possono essere grandi.

4.2 Cinematica della trave

Nel presente studio, una trave si considera come un corpo tridimensionale \mathcal{B} che in una configurazione naturale \mathcal{C}^u ha forma cilindrica. Si assume che in tale configurazione le sezioni trasversali della trave siano dotate di simmetria cinetica, cioè abbiano uguali i momenti centrali d'inerzia, e si indica con \mathcal{C}^u la curva assiale nella configurazione \mathcal{C}^u , ossia il segmento rettilineo su cui sono allineati i baricentri delle sezioni. I punti materiali che giacciono su \mathcal{C}^u costituiscono l'asse delle trave. Denotata con L la lunghezza di \mathcal{C}^u , si indicano con $s \in (0, L)$ l'ascissa che parametrizza tale segmento, e con $\mathbf{x}^u = \mathbf{x}^u(s)$ la posizione dei suoi punti. Nell'ordine di approssimazione in cui la teoria di Kirchhoff è valida, l'asse della trave può considerarsi inestensibile. Se h è la massima distanza tra due punti di una sezione, il corpo \mathcal{B} può dirsi una trave quando risulta $h/L \ll 1$.

Ad ogni punto $\mathbf{x}^u(s)$ di \mathcal{C}^u può associarsi una terna ortonormale $(\mathbf{d}_1^u, \mathbf{d}_2^u, \mathbf{d}_3^u)$, detta *terna di flessione-torsione*, con \mathbf{d}_3^u tangente all'asse e \mathbf{d}_1^u e \mathbf{d}_2^u aventi le direzioni degli assi centrali di inerzia della sezione. La posizione di un generico punto $\hat{\mathbf{x}}^u$ di \mathcal{B} potrà, quindi, essere individuata

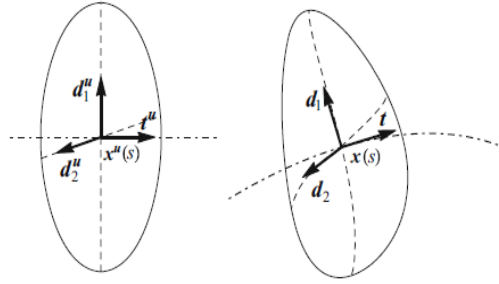


Figura 4.1: Le terne nelle due configurazioni

da tre parametri s, X_1, X_2 :

$$\hat{\mathbf{x}}^u(s, X_1, X_2) = \mathbf{x}^u(s) + X_1 \mathbf{d}_1^u + X_2 \mathbf{d}_2^u, \quad (4.1)$$

dove X_1 e X_2 sono le coordinate che individuano la posizione di $\hat{\mathbf{x}}^u$ nella sezione all'ascissa s .

Si consideri ora una diversa configurazione \mathcal{C} della trave, in cui i punti dell'asse non giacciono più su un segmento rettilineo ma su una curva \mathcal{C} , in genere non piana, che è la curva assiale della configurazione considerata. Essendo l'asse della trave inestensibile, il parametro s è un'ascissa curvilinea per la curva \mathcal{C} , e i punti materiali dell'asse possono identificarsi con i valori di tale ascissa.

Nella teoria di Kirchhoff una configurazione \mathcal{C} può descriversi attraverso l'applicazione $\Phi_{\mathcal{C}} : s \rightarrow (x, \mathbf{d}_1)$ che fornisce la posizione $x(s)$ del punto s dell'asse, e il vettore unitario $\mathbf{d}_1(s)$ ortogonale in $x(s)$ alla curva assiale che, come verrà approfondito in seguito, può considerarsi tangente alla curva formata nella configurazione \mathcal{C} dai punti materiali che in \mathcal{C}^u sono sull'asse centrale d'inerzia avente la direzione di \mathbf{d}_1^i nella sezione all'ascissa s .

L'applicazione $\Phi_{\mathcal{C}}$ determina quindi per ogni punto x di \mathcal{C} una terna ortogonale $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$. Infatti, attraverso la condizione di inestensibilità possiamo ricavare il vettore tangente alla curva:

$$\mathbf{t} = \mathbf{d}_3 = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \quad (4.2)$$

di conseguenza si può ottenere il vettore $\mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_3 \times \mathbf{d}_1$ vedi Fig.(4.1). Nella configurazione deformata le sezioni non sono più piane. I punti materiali, che nella configurazione \mathcal{C}^u si trovavano lungo gli assi principali di inerzia delle sezioni, nella configurazione \mathcal{C} formano delle curve.

Scegliendo \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 tangenti, in corrispondenza dell'asse della trave, alle curve su cui giacciono i punti materiali che nella configurazione naturale erano lungo gli assi principali d'inerzia delle sezioni, si dimostra che, nell'ordine di approssimazione in cui la teoria è valida, \mathbf{d}_1 e \mathbf{d}_2 possono considerarsi ortogonali tra loro e al versore \mathbf{d}_3 .

La terna $\mathbf{d}_1(s)$, $\mathbf{d}_2(s)$, $\mathbf{d}_3(s)$ viene definita da Love *terna principale di flessione-torsione*. Analizzando la rotazione della terna \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 , \mathbf{d}_3 , lungo la linea d'asse \mathcal{C} possiamo caratterizzare la deformazione subita dalla trave.

Essendo la terna ortonormale per ogni punto della curva, per il teorema di Poisson:

$$\mathbf{d}_{i,s} = \frac{d}{ds} \mathbf{d}_i = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{d}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.3)$$

Dove $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}(s)$ è il *vettore curvatura* della configurazione \mathcal{C} . Le componenti $\kappa_1 = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{d}_1$ e $\kappa_2 = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{d}_2$ vengono definite *componenti della curvatura* della linea d'asse \mathcal{C} : la *curvatura* k di \mathcal{C} è infatti definita come $k = \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}$. La componente $\kappa_3 = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{d}_3$ di $\boldsymbol{\kappa}$ lungo la direzione tangente a \mathcal{C} viene invece definita *densità di twist* della trave e generalmente non coincide con la torsione τ . Infatti definiti con \mathbf{n} e \mathbf{b} rispettivamente la normale e la binormale alla curva \mathcal{C} , per ogni punto $x(s)$, di tale curva, non è detto che le coppie di versori $(\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ e $(\mathbf{d}_1(s), \mathbf{d}_2(s))$ debbano coincidere. Chiamato $\varphi(s)$ l'angolo tra $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{d}_1(s)$ valgono le seguenti relazioni:

$$\tau = \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_{,s}, \quad \kappa_3 = \mathbf{d}_{1,s} \cdot \mathbf{d}_2 = -\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_{2,s} = \tau + \varphi_{,s} \quad (4.4)$$

Se si tiene conto del fatto che $\mathbf{t}_{,s} = k\mathbf{n}$ e della definizione dell'angolo φ , attraverso le formule di Serret-Frenet possiamo riscrivere $\boldsymbol{\kappa}$ come:

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathbf{d}_i \times \mathbf{d}_{i,s} = \mathbf{t} \times \mathbf{t}_{,s} + \kappa_3 \mathbf{t} = k\mathbf{b} + \kappa_3 \mathbf{t} \quad (4.5)$$

Il vettore $\boldsymbol{\kappa}$ esprime quindi la misura della deformazione che abbiamo tra la configurazione della trave rettilinea \mathcal{C}^u a quella deformata \mathcal{C} .

4.3 Equilibrio della trave

Si vuole ora studiare l'equilibrio di un elemento infinitesimo di trave ds nella configurazione deformata \mathcal{C} .

Si assuma, per semplicità, che le forze e i momenti siano applicati esclusivamente all'estremità della trave, considerando quindi nulli eventuali carichi

distribuiti e forze di massa di quest'ultima.

L'elemento in esame è quindi soggetto alla forza reattiva $\mathbf{F}(s)$, ovvero la risultante degli sforzi di Piola. Tali sollecitazioni sono esercitate dal materiale dal lato delle s crescenti, sulla superficie all'ascissa s nella configurazione \mathfrak{C} , definita dai punti materiali che in \mathfrak{C}^u giacevano sulla sezione trasversale. L'elemento è inoltre soggetto al momento risultante $\mathbf{M}(s)$ di tale forza rispetto un polo ben definito. Si considerino i rispettivi incrementi lungo le s crescenti.

Scelto come polo per la riduzione dei momenti il trasformato del baricentro della sezione all'ascissa s , l'equilibrio alla traslazione e alla rotazione può essere allora espresso come:

$$\begin{cases} -\mathbf{F}(s) + \mathbf{F}(s + ds) = 0 \\ -\mathbf{M}(s) + \mathbf{M}(s + ds) + (\mathbf{x}(s + ds) - \mathbf{x}(s)) \times \mathbf{F}(s + ds) = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Sviluppando in serie di Taylor arrestata al primo ordine scriveremo:
per le forze,

$$-\mathbf{F}(s) + \mathbf{F}(s) + \frac{d\mathbf{F}}{ds}(s)ds + o(ds) = 0 \quad (4.7)$$

per i momenti,

$$-\mathbf{M}(s) + \mathbf{M}(s) + \frac{d\mathbf{M}}{ds}(s)ds + o(ds) + (\mathbf{x}(s) + \frac{d\mathbf{x}}{ds}(s)ds + o(ds)) \times (\mathbf{F}(s) + \frac{d\mathbf{F}}{ds}(s)ds + o(ds)) = 0 \quad (4.8)$$

Se si assume che le funzioni sono continue, si divide per il termine ds e si fa tendere ds a zero si ha:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{,s} = 0 \\ \mathbf{M}_{,s} + \mathbf{t} \times \mathbf{F} = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Si ottengono quindi le equazioni indefinite di equilibrio per una trave soggetta solamente a forze e momenti applicati alle estremità.

4.4 Legame costitutivo

In precedenza si sono analizzate le equazioni che governano la cinematica e la statica del modello di trave introdotto. Fra le grandezze di tipo statico e quelle di tipo cinematico esistono dei legami che dipendono dal tipo di materiale da cui è costituita la trave.

Tali legami vengono descritti e approfonditi da Love in "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity".

Nel presente studio si analizzano travi il cui materiale possa considerarsi isotropo e omogeneo. La forza interna risultante F , come già trattato in precedenza, è di tipo reattivo, per questo motivo non presenterà un legame costitutivo con le deformazioni della trave.

Per quanto concerne la risultante dei momenti, proiettata sulla terna (d_1, d_2, d_3) , si può scrivere:

$$M_1 = EI\kappa_1 \quad (4.10)$$

$$M_2 = EI\kappa_2 \quad (4.11)$$

$$M_3 = GJ\kappa_3 \quad (4.12)$$

Dove E rappresenta il modulo di elasticità longitudinale del materiale, I è il momento di inerzia delle sezioni nella configurazione di riferimento, J è il fattore di rigidezza torsionale e G è il modulo di elasticità tangenziale.

In seguito si andrà ad analizzare un caso di *flessione semplice*, ovvero il caso in cui la deformazione non presenti *twist*, quindi in ogni configurazione $\tau = 0$ e $\kappa_3 = 0$.

Per questo tipo di deformazione si può assumere che le curve assiali \mathcal{C}^u e \mathcal{C} giacciono nello stesso piano \mathcal{P} , contenente uno degli assi principali di inerzia delle sezioni trasversali. Allora per un materiale omogeneo e isotropo, con una deformazione di flessione semplice, le equazioni costitutive si semplificano a:

$$M(s) = M(s)b = EIt(s) \times t_{,s}(s) = EI k(s)b \quad (4.13)$$

Capitolo 5

Risoluzione delle equazioni di equilibrio

5.1 Introduzione

Nel presente capitolo si vogliono risolvere le equazioni non lineari di equilibrio attraverso l'utilizzo delle funzioni ellittiche di Weierstrass. Si consideri un caso di flessione semplice, in cui siano valide le ipotesi e relazioni introdotte in precedenza.

5.2 Equazioni di equilibrio in componenti

Supponiamo che la configurazione \mathcal{C} sia una configurazione di equilibrio per la trave \mathcal{B} . Le equazioni di equilibrio per suddetta trave sono:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{,s} = 0 \\ \mathbf{M}_{,s} + \mathbf{t} \times \mathbf{F} = 0 \end{cases}$$

Si può notare che $\mathbf{F}(s)$ è una funzione costante lungo l'asse della trave, in quanto la sua derivata rispetto a s è nulla. Pertanto ricordando la condizione di inestensibilità della trave $\mathbf{t} = \mathbf{x}_{,s}$ l'equazione di equilibrio dei momenti può essere espressa come:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{,s} + (\mathbf{x} \times \mathbf{F})_{,s} &= 0, \\ (\mathbf{M} + \mathbf{x} \times \mathbf{F})_{,s} &= 0, \end{aligned}$$

se si integra tale equazione si ottiene:

$$\mathbf{M} + \mathbf{x} \times \mathbf{F} = \mathbf{c} \tag{5.1}$$

Il vettore costante \mathbf{c} è dovuto all'integrazione, tale vettore dipende dalla scelta dell'origine del sistema di riferimento. Scegliendo in maniera opportuna tale origine \mathbf{c} può essere parallelo ad \mathbf{F} o diventare nullo. Il vettore \mathbf{c} si annulla quando il prodotto scalare tra \mathbf{F} e \mathbf{M} è nullo.

Introduciamo allora un sistema di riferimento (x, y, z) , con i rispettivi versori per gli assi (i_1, i_2, i_3) , scegliendo l'origine del sistema sulla retta di applicazione di \mathbf{F} . Si ha:

$$\mathbf{M} + \mathbf{x} \times \mathbf{F} = 0$$

Si può ora esplicitare M attraverso la relazione costitutiva introdotta in precedenza(2.14):

$$EI \mathbf{t} \times \mathbf{t}_{,s} + \mathbf{x} \times \mathbf{F} = 0$$

Dividendo per il termine EI ed introducendo il vettore $\Phi := \frac{1}{EI} \mathbf{F}$ si ottiene:

$$\mathbf{t} \times \mathbf{t}_{,s} + \mathbf{x} \times \Phi = 0 \tag{5.2}$$

Possiamo ora considerare le componenti dei termini nel sistema di riferimento introdotto. Avremo $\mathbf{t} = x' \mathbf{i}_1 + y' \mathbf{i}_2 + z' \mathbf{i}_3$, $\mathbf{t}_{,s} = x'' \mathbf{i}_1 + y'' \mathbf{i}_2 + z'' \mathbf{i}_3$, $\mathbf{x} = x \mathbf{i}_1 + y \mathbf{i}_2 + z \mathbf{i}_3$ e assumendo che F sia parallela all'asse delle x avremo $\Phi = \Phi_1 \mathbf{i}_1$. Se si scrive l'equazione (5.2) nelle componenti lungo le direzioni (i_1, i_2, i_3) si ha:

$$\begin{aligned} y' z'' - y'' z' &= 0 \\ z' x'' - z'' x' &= -\Phi_1 z \\ x' y'' - x'' y' &= \Phi_1 y \end{aligned}$$

Ovvero le equazioni di equilibrio per un caso di flessione semplice espresse in termini di spostamenti e deformazioni.

5.3 Deformazione piana

Se si considera che nella configurazione \mathcal{C} la deformazione subita è di flessione semplice, allora la curva assiale \mathcal{C} è contenuta su un piano \mathcal{P} , che identifichiamo, nel sistema di riferimento introdotto in precedenza, con il piano xy caratterizzato dai punti che hanno $z = 0$. In tal caso l'equilibrio sarà espresso da:

$$x' y'' - x'' y' = \Phi_1 y \tag{5.3a}$$

La condizione di inestensibilità della trave nel piano può essere espressa attraverso la condizione:

$$(x')^2 + (y')^2 = 1 \tag{5.3b}$$

che implica:

$$x'x'' + y'y'' = 0 \quad (5.3c)$$

Le equazioni (5.3a) e (5.3b) formano un sistema non lineare di equazioni per le funzioni incognite $x = x(s)$ e $y = y(s)$, che possono essere risolte trasformando il sistema in una forma risolvibile attraverso le funzioni ellittiche.

Moltiplicando l'equazione (5.3a) per y' si ha:

$$y'y''x' - x''y'^2 = \Phi_1yy' \quad (5.4)$$

Dalla quale usando le equazioni (5.3b) e (5.3c),¹

$$x'' = -\Phi_1yy' \quad (5.5)$$

Che una volta integrata può essere scritta come:

$$y^2 = \frac{2}{\Phi_1}(c - x'), \quad (5.6)$$

dove c è una costante d'integrazione. Infine sostituendo la (5.3b), la (5.5) e la (5.6) nell'identità $(yy')^2 = y^2y'^2$ otteniamo:

$$(x'')^2 = 2\Phi_1(c - x')(1 - (x')^2),$$

che può essere risolta in termini di

$$\chi(s) := x'(s)$$

con l'utilizzo delle funzioni ellittiche di Weierstrass.

5.4 Risoluzione attraverso la teoria delle funzioni ellittiche di Weierstrass

Si vuole ora trasformare l'equazione trovata in una forma equivalente sulla quale sia applicabile la teoria delle funzioni ellittiche di Weierstrass. Per comprendere meglio lo studio, bisogna suddividere le possibili posizioni di equilibrio in due tipologie: "elastica *inflessionale*" e "elastica *non inflessionale*".

La prima tipologia comprende le travi che nella configurazione di equilibrio contengono "inflessioni", ovvero punti, dell'asse della trave, dove la curvatura

¹Si ha che:

$$\begin{aligned} (-x'x'')x' - x''(1 - (x')^2) &= \Phi_1yy' \\ -(x')^2x'' - x'' + (x')^2x'' &= \Phi_1yy' \end{aligned}$$

e il momento sono nulli.

La particolarità di questi punti è di trovarsi sulla retta di applicazione della forza applicata e di essere equidistanti tra loro.

L'elastica "non inflessionale" non presenta punti in cui la curvatura è nulla e per rimanere in equilibrio ha bisogno oltre alle forze applicate anche di momenti applicati. Una volta definita la $\chi(s)$ si può riscrivere l'equazione nella forma:

$$(\chi')^2 = 2\Phi_1(c - \chi)(1 - \chi)(1 + \chi) = f_o(\chi), \quad (5.7)$$

dove la funzione cubica $f(\chi)$ si annulla per i tre valori:

$$\chi_a^o = -1, \quad \chi_b^o = c, \quad \chi_c^o = 1,$$

Il valore di c può essere ricavato dalla (5.6) espressa come:

$$c = \chi + \frac{\Phi}{2}y^2 \geq \chi \geq -1. \quad (5.8)$$

Definiti con χ_1^o , χ_2^o e χ_3^o gli zeri della funzione f_o scelti in modo tale che $\chi_1^o > \chi_2^o > \chi_3^o$, quindi:

$$\chi_1^o = \max\{1, c\}, \quad \chi_2^o = \min\{1, c\}, \quad \chi_3^o = -1,$$

attraverso lo studio della funzione f_o si può notare che $\lim_{\chi \rightarrow \pm\infty} f_o(\chi) = \pm\infty$, quindi dovendo essere la funzione positiva la soluzione χ si troverà nell'intervallo $[\chi_2^o, \chi_3^o]$.

Si noti che il valore di $\chi_b^o = c$ è il valore per cui la y si annulla, ovvero si hanno delle inflessioni. Tale valore è raggiungibile solamente nel caso $-1 < c < 1$, in questo caso infatti la soluzione della mia equazione di equilibrio sarebbe compresa nell'intervallo $[-1, c]$.

Nel caso $c > 1$, la soluzione sarebbe compresa nell'intervallo $[-1, 1]$ e non ci sarebbero punti in cui $\chi = c$, ovvero punti dove $y = 0$.

Per poter applicare il teorema di Weierstrass per funzioni ellittiche dobbiamo porre l'equazione (5.7) nella forma canonica attraverso la trasformazione:

$$\chi = p + q\kappa, \quad (5.9)$$

dove $p = c/3$ e $q = 2/\Phi$. Sostituendo nell'equazione otteniamo :

$$(\kappa, s)^2 = 4(\kappa - \kappa_1^o)(\kappa - \kappa_2^o)(\kappa - \kappa_3^o). \quad (5.10)$$

La trasformazione (5.9) è una trasformazione lineare, per questo motivo l'ordine degli zeri rimane invariato, ovvero:

$$\kappa_i^o = \frac{\chi_i^o - p}{q} = \left(\chi_i^o - \frac{c}{3}\right)\frac{\Phi}{2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.11)$$

Se la χ variava nell'intervallo $[\chi_2^o, \chi_3^o]$ ora κ varia nell'intervallo $[\kappa_2^o, \kappa_3^o]$. La (5.10) può essere riscritta nella forma canonica:

$$(\kappa, s)^2 = 4\kappa^3 - g_2\kappa - g_3, \quad (5.12)$$

Dove g_2^o e g_3^o si ricavano dalle formule:

$$g_2^o = -4(\kappa_1^o\kappa_2^o + \kappa_2^o\kappa_3^o + \kappa_3^o\kappa_1^o), \quad g_3^o = 4\kappa_1^o\kappa_2^o\kappa_3^o. \quad (5.13)$$

Se è valida la relazione differenziale espressa dalla (5.12), allora $\kappa = \kappa(s)$ può essere espressa come:

$$\kappa = \wp(u) = \wp_o(s + s_0 | g_2^o, g_3^o), \quad (5.14)$$

La funzione \wp_o introdotta è la funzione ellittica di Weierstrass, di variabile complessa s , che risolve l'equazione differenziale (5.12).

I valori di g_2 e g_3 , sono gli *invarianti* della funzione ellittica. Dagli zeri della (5.12) si può dedurre che:

$$\wp(\omega_1^o) = \kappa_1^o \quad \wp(\omega_2^o) = \kappa_2^o \quad \wp(\omega_3^o) = \kappa_3^o, \quad (5.15)$$

dove ω_1 e ω_3 (gli stessi indicati nel Cap.3 con ω e ω') sono i semi-periodi della \wp , infatti la funzione risulta doppiamente periodica rispetto ai periodi $2\omega_1$ e $2\omega_3$. I punti $0, \omega_1, \omega_2$ e ω_3 , sul piano complesso, sono i vertici del parallelogramma fondamentale del reticolo generato dalle basi ω_1 e ω_3 , come mostrato in Fig.(5.1). Partendo da $u = 0$ e percorrendo il contorno del parallelogramma nel verso positivo incontreremo:

$$0, \quad \omega_1^o, \quad \omega_2^o = (\omega_1^o + \omega_3^o), \quad \omega_3^o.$$

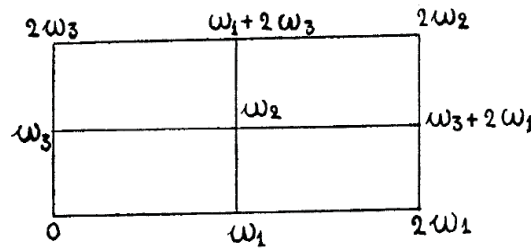


Figura 5.1: Reticolo di basi ω_1 e ω_3

Se ci si muove lungo il contorno di tale parallelogramma i valori della \wp sono reali, questo perché le radici del polinomio in κ sono reali, quindi anche gli invarianti g_2 e g_3 sono reali. Da ciò segue che il periodo ω_1 è reale e ω_3 immaginario, quindi il parallelogramma dei periodi è un rettangolo. Il fatto che \wp è reale sul contorno del rettangolo dei periodi si può vedere come conseguenza della proprietà di \wp di assumere valori coniugati in punti simmetrici rispetto all'asse reale e a quello immaginario, e in punti simmetrici rispetto alle linee mediane del rettangolo.

Il significato fisico di χ richiede che i suoi valori siano reali, quindi che $\wp(0)$ sia reale, ossia che il suo argomento vari sul perimetro del rettangolo.

In particolare nel vertice "0" la funzione assume il valore $\wp(0) = +\infty$, percorrendo in senso antiorario il parallelogramma la funzione nel primo tratto varia da più infinito al valore del primo vertice $\wp(\omega_1) = \kappa_1$, nel secondo tratto varia da κ_1 al valore del secondo vertice $\wp(\omega_2) = \kappa_2$, seguendo con il terzo lato del parallelogramma \wp assume valori da κ_2 a $\wp(\omega_3) = \kappa_3$ ed infine ritorna nel primo vertice con valore $\wp(0) = -\infty$.

Una volta determinata la funzione $\kappa(s)$, l'equazione (5.9) può essere riscritta introducendo la \wp :

$$\chi(s) = \frac{c}{3} + \frac{2}{\Phi} \wp(\omega_2^o + s),$$

la quale può essere integrata ricordando che $x' = \chi$ e che $\zeta u = -\wp u$:

$$x(s) = x(0) + \left[\frac{cs}{3} - \frac{2\zeta(\omega_2^o + s)}{\Phi} \right]_0^s,$$

Di conseguenza possiamo ottenere l'espressione per la y attraverso la (5.6):

$$y(s) = \pm \sqrt{\frac{2(c - \chi(s))}{\Phi}}.$$

Si ottengono quindi le coordinate dei punti dell'asse della trave \mathcal{C} in funzione di s .

Di seguito si analizzano i casi di un'elastica inflessionale e di un'elastica non inflessionale.

5.5 Elastica inflessionale

Si prenda in esame una trave soggetta solamente a forze applicate alle sue estremità, dove, all'equilibrio, la retta di azione di tali forze interseca la curva assiale, quindi il caso di un'elastica inflessionale.

Affinchè siano possibili configurazioni di equilibrio differenti da quella iniziale, il modulo delle forze applicate deve essere superiore, o al limite uguale, al carico critico di Eulero (vedi Capitolo 2.3). Quindi deve essere soddisfatta la seguente relazione:

$$F \geq P_{cr},$$

$$F \geq \frac{\pi^2 EI}{4L^2},$$

che nel caso che si sta studiando può essere riscritta introducendo Φ :

$$\Phi \geq \frac{\pi^2}{4L^2},$$

perciò maggiore sarà la lunghezza della trave e minore dovrà essere il carico per generare posizioni di equilibrio differenti da quella iniziale.

Si consideri, inoltre, la trave inestensibile e che i punti, rappresentanti le estremità della trave, siano due punti di inflessione con vettori tangenti paralleli.

Si scelga un sistema di riferimento con origine nel punto sull'asse della trave dove $s = 0$. La direzione dell'asse x coincide con la direzione della forza esterna agente sul punto dove $s = L$. Nel sistema di riferimento così introdotto le inflessioni sono caratterizzate da $y = 0$. Si indichi, infine, con $\theta(s)$ l'angolo formato dall'asse x e il vettore tangente alla curva in s . Inoltre con γ indichiamo l'angolo che il versore $-x$ forma con la tangente alla curva in $s = 0$.

Si prenda in esame la deformazione mostrata in Fig.5.2, il punto $s = 0$ (con $x = 0$ e $y = 0$) ha $\chi_o = \chi(0) = \cos\theta(0) = \cos(\pi + \gamma) = c$. Si noti che in questo caso $-1 \leq c \leq 1$, allora le radici della funzione $f(\chi)$ saranno:

$$\chi_1 = 1 \quad \chi_2 = c \quad \chi_3 = -1$$

La χ , per i motivi introdotti in precedenza, varia quindi nell'intervallo $[-1, c]$. Attraverso le radici possiamo calcolare gli invarianti della funzione \wp di Weierstrass, utilizzando le equazioni 5.11 e 5.13.

Di conseguenza si ottiene:

$$\kappa(s) = \wp(s + s_0 | g_2, g_3).$$

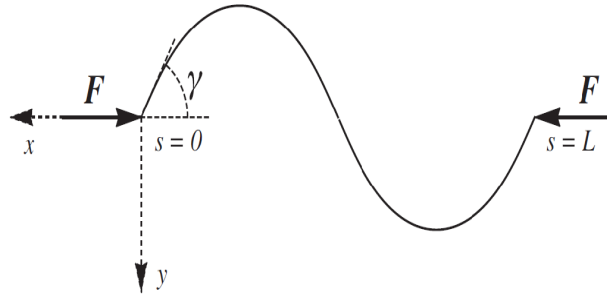


Figura 5.2: Esempio di deformazione elastica inflessionale

Determinata tale funzione, attraverso la (5.15), si può comprendere in quale tratto, del reticolo generato dai semiperiodi, si trova la funzione \wp quando ci si muove lungo la linea d'asse della trave da $s = 0$ a $s = L$. Per $s = 0$ il valore della χ è dato da $\chi = \cos(\pi + \gamma) = c = \chi_2$. Per $s = 0$ la funzione di Weierstrass si troverà nel punto in cui assume valore κ_2 ovvero il vertice ω_2 ($\wp(\omega_2) = \kappa_2$), ne segue che la costante $s_0 = \omega_2$, in quanto $\wp(0 + s_0) = \kappa_2$. Se ci si sposta in $s = L/4$ abbiamo $\chi = \cos(\pi) = -1 = \chi_3^0$, quindi la funzione \wp tende a raggiungere il valore κ_3 che si ottiene in ω_3 ($\wp(\omega_3) = \kappa_3$). Quindi se ci si muove sulle s crescenti da $s = 0$ a $s = L/4$, si passa dal valore κ_2 a κ_3 la funzione si sta muovendo sul contorno compreso tra ω_2 a $\omega_3 + 2\omega_1$. Con lo stesso ragionamento si nota che quando s varia nell'intervallo $[0, L]$ la funzione si sposta sul parallelogrammo da ω_2 a $\omega_3 + 5\omega_1$, ne segue che $L = 4\omega_1$. Le inflessioni lungo l'asse della trave hanno periodicità $2\omega_1$. Le equazioni che esprimono la deformazione dell'asse della trave sono:

$$x(s) = x(0) + \left[\frac{cs}{3} - \frac{2\zeta(\omega_2^0 + s)}{\Phi} \right]_0^s,$$

$$y(s) = (-1)^{Fl(\frac{s}{2\omega_1})} \sqrt{\frac{2(c - \chi(s))}{\Phi}},$$

dove la funzione $Fl(s/2\omega_1)$ restituisce il più grande numero intero minore o uguale di $s/2\omega_1$.

Si noti che, ogni configurazione di equilibrio, è associata ad una coppia di valori (Φ, γ) , infatti definito un carico Φ , la trave è in equilibrio per un determinato valore di γ . Ricordando che $L = 4\omega_1$ e che la ω_1 è funzione di Φ e di γ , si può scrivere:

$$\omega(\Phi, \gamma) = \frac{L}{4},$$

CAPITOLO 5. RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

ciò definisce implicitamente una delle due variabili come funzione dell'altra. Attraverso l'uso del software *Mathematica* si sono trovate alcune coppie di valori $\Phi - \gamma$ per cui è valida l'uguaglianza sopra introdotta e si è riportato sul piano (Φ, γ) l'andamento del carico in funzione dell'angolo, calcolato per una trave di lunghezza $L = 8$, vedi Fig.(5.3). All'aumentare dell'intensità della forza F applicata, quindi all'aumentare di Φ , l'angolo γ tende a crescere.

Figura 5.3: Piano (Φ, γ) per un'elastica inflessionale costruito considerando $L = 8$

Si riportano di seguito configurazioni di equilibrio della trave, con $L = 8$, per diversi valori di γ :

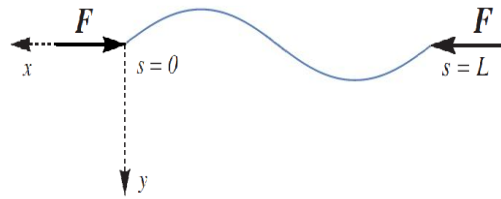


Figura 5.4: Deformazione elastica inflessionale con $\gamma = 30^\circ$

Figura 5.5: Deformazione elastica inflessionale con $\gamma = 60^\circ$

Figura 5.6: Deformazione elastica inflessionale con $\gamma = 105^\circ$

Figura 5.7: Deformazione elastica inflessionale con $\gamma = 130^\circ$

Figura 5.8: Deformazione elastica inflessionale con $\gamma = 140^\circ$

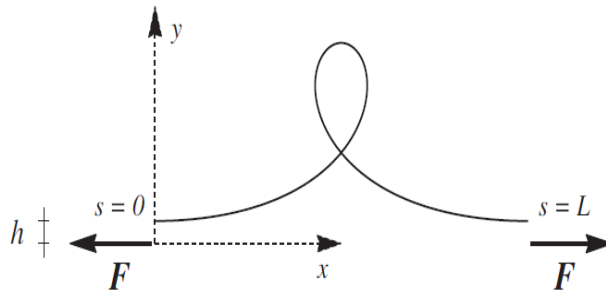


Figura 5.9: Esempio di deformazione elastica non inflessionale

5.6 Elastica non inflessionale

Si analizzi ora il caso in cui la trave, all'equilibrio, è soggetta alle sue estremità, sia a dei momenti, che a delle forze.

Il sistema, così descritto, è staticamente equivalente a due forze opposte, la cui linea d'azione non intercetta la linea d'asse della trave, ovvero un'elastica non inflessionale.

Affinchè le configurazioni di equilibrio si discostino da quella iniziale manteniamo l'ipotesi di carico critico:

$$\Phi \geq \frac{\pi^2}{4L^2}$$

I punti della trave più vicini alla retta d'azione delle forze, distano h da essa e la tangente alla curva in quei punti è parallela alla retta.

I suddetti punti, sono i punti che rappresentano le estremità della trave ($s = 0$ e $s = L$).

Si consideri un sistema di riferimento con l'asse x coincidente con la retta d'azione delle forze esterne e con la stessa direzione della forza applicata nel punto $s = L$. L'origine del sistema di riferimento è scelto in modo tale che l'asse y intercetti la curva assiale \mathcal{C} nel punto $s = 0$ (Fig. 5.9). Si noti che in questa configurazione le radici della funzione $f(\chi)$ sono differenti. Infatti il punto $s = 0$, in cui $x = 0$, $y = h$ e $\theta = 0$ ha $\chi = \chi_0 = 1$, quindi dalla (5.8):

$$c = 1 + \frac{\Phi h^2}{2} > 1$$

quindi le radici di $f(\chi)$ sono:

$$\chi_1 = c \quad \chi_2 = 1 \quad \chi_3 = -1,$$

Il valore di χ varia quindi nell'intervallo $[-1,1]$.

Con lo stesso procedimento del capitolo precedente attraverso le radici della

$f(\chi)$ possiamo calcolare gli invarianti della funzione \wp di Weierstrass, utilizzando le equazioni 5.11 e 5.13.

Di conseguenza si ottiene nuovamente la:

$$\kappa(s) = \wp(s + s_0 | g_2, g_3).$$

Si vuole comprendere in quale tratto, del parallelogramma dei semiperiodi, si trova la funzione \wp quando ci si muove lungo la linea d'asse della trave da $s = 0$ a $s = L$.

In $s = 0$ la $\chi = \cos(0) = 1 = \chi_2$, quindi la funzione di Weierstrass si troverà nel punto in cui assume valore κ_2 e quindi ω_2 , il valore della costante $s_0 = \omega_2$. Se ci muoviamo in $L/2$ la $\chi = \cos(\pi) = -1 = \chi_3$, la funzione \wp raggiunge il punto in cui ha valore κ_3 . Quindi per s che varia nell'intervallo $[0, L/2]$ la funzione si muove nell'intervallo $[\omega_2, \omega_3 + 2\omega_1]$. Con lo stesso ragionamento se s varia nell'intervallo $[0, L]$ la funzione si muove nell'intervallo $[\omega_2, \omega_3 + 3\omega_1]$, quindi $L = 2\omega_1$.

Le equazioni che determinano la configurazione dell'asse della trave sono:

$$x(s) = x(0) + \left[\frac{cs}{3} - \frac{2\zeta(\omega_2^o + s)}{\Phi} \right]_0^s,$$

$$y(s) = +\sqrt{\frac{2(c - \chi(s))}{\Phi}},$$

In questo caso l'equilibrio è associato alla coppia di valori (Φ, h) , infatti per ogni valore di Φ , si ha un determinato valore di h per il quale la trave è in equilibrio.

Ricordando che in un'elastica non inflessionale $L = 2\omega_1$ e che ω_1 è funzione di Φ e h , si può scrivere:

$$\omega_1(\Phi, h) = L/2,$$

ciò definisce, anche in questo caso, implicitamente una delle due variabili come funzione dell'altra. Attraverso l'uso del software *Mathematica* si sono trovate alcune coppie di valori $\Phi - h$ che rendono valida l'eguaglianza sopra introdotta e successivamente si è riportato sul piano (Φ, h) l'andamento del carico in funzione dell'altezza h delle estremità della trave, vedi Fig.(5.10). Si riportano di seguito configurazioni di equilibrio per diversi valori di h :

All'aumentare dell'intensità della coppia di forze applicate, perciò all'aumentare di Φ , la distanza h tra la retta d'azione delle forze e le estremità della trave tende a diminuire.

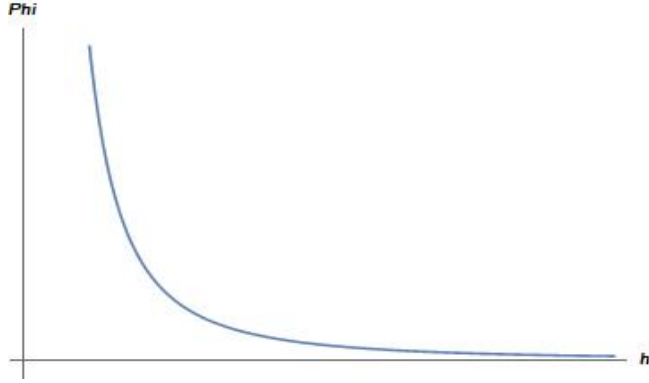


Figura 5.10: Piano (Φ, h) per un'elastica non inflessionale costruito considerando $L = 8$

Figura 5.11: Deformazione elastica non inflessionale con $h = 1.5$

Figura 5.12: Deformazione elastica non inflessionale con $h = 3.2$

Figura 5.13: Deformazione elastica non inflessionale con $h = 4.8$

Figura 5.14: Deformazione elastica non inflessionale con $h = 7.5$

Riferimenti

Derivata Logaritmica

\AM@currentdocname .png

.png

Teorema di Weierstrass

\AM@currentdocname .png

.png

Gli zeri della funzione seno nel campo complesso

\AM@currentdocname .png

.png

Caso in cui le distanze fra i punti di infinitesimo si mantengono superiori ad una quantità fissa

\AM@currentdocname .png

.png

Espressione di una funzione ellittica con infiniti e infinitesimi assegnati

\AM@currentdocname .png

.png

\AM@currentdocname .png

.png

Formula fondamentale per $\wp u - \wp v$

\AM@currentdocname .png

.png

\AM@currentdocname .png

.png

Bibliografia

- [1] Bianchi, Luigi (1928), *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche*, Bologna Nicola Zanichelli, Volume 1
- [2] Bianchi, Luigi (1930), *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche*, Bologna Nicola Zanichelli Editore, Volume 2.
- [3] Coleman B.D., Dill E.H., Lembo M., Lu Z., Tobias I.(1993), *On the Dynamics of Rods in the Theory of Kirchhoff and Clebsch*, Springer-Verlag, Cap. 2 Basic Concepts.
- [4] Dill, Ellis (1991), *Kirchhoff's Theory of Rods*, College of Engineering Rutgers University Piscataway, New Jersey.
- [5] Lembo, Marzio (2017), *Exact solutions for post-buckling deformations of nanorods*, Springer-Verlag Wien, Cap.2 Nonlinear deformations of nonlocal rods.
- [6] Pastras, Georgios (2017), *Four Lectures on Weierstrass Elliptic Function and Applications in Classical and Quantum Mechanics*, NCSR "Demokritos", Institute of Nuclear and Particle Physics, Attiki, Lecture 1: Weierstrass Elliptic Function.
- [7] Greco, Donato (1967), *Complementi di Analisi*, Liguori Editore, Napoli.
- [8] Lembo, Marzio (2016), *On nonlinear deformations of nonlocal elastic rods*, in *"International Journal of Solids and Structures"*, Elsevier Ltd., Cap.1-5.
- [9] Krantz, S. G. (1999), *Handbook of Complex Variables*, Boston, §1.3.5 The Complex Derivative.
- [10] Wikipedia, <https://it.wikipedia.org/wiki/Coppia-fondamentale-di-periodi>.