



FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Meccanica
Tesi di Laurea in Scienza delle Costruzioni

*Analisi meccanica di strutture reticolari mediante
l'utilizzo del Large Structure Set dell'azienda
PASCO*

Relatore:
Prof.
Giuseppe Tomassetti

Candidato:
Alessio Mariti
matricola 492623

Sessione Estiva
Anno Accademico 2018-2019

Indice

Elenco delle figure	2
Elenco delle tabelle	4
Introduzione	5
Prima parte: Realizzazione dei modellini	6
Seconda parte: Il metodo delle deformazioni	10
Terza parte: Il problema della struttura reale	14
Quarta parte: Esperimenti	18
Maglia triangolare	18
Capriata all'italiana	22
Trave di Howe	29
Trave di Pratt	32
Travatura di Mohriè	35
Conclusioni	38
Alcuni utilizzi delle strutture presentate	39
Bibliografia	42

Elenco delle figure

1	Componenti utilizzati per la realizzazione delle strutture	6
2	Amplificatore	6
3	Interfaccia universale 850	7
4	Interfaccia iniziale del programma PASCO CAPSTONE	7
5	Gancio con disco, entrambi da 0.50 kg	9
6	Trave di collegamento: a) carico applicato direttamente sul nodo; b) carico applicato nella mezzera dell'asta	9
7	Carico applicato sul nodo e carico applicato sull'asta di collegamento	10
8	Asta doppiamente incastrata con curvatura simmetrica	11
9	Asta doppiamente incastrata con curvatura antisimmetrica	11
10	Esempio di una rotazione unitaria imposta al nodo A	12
11	Traslazione del nodo A verso il basso	13
12	Arco a tre cerniere iperstatico	14
13	Trave BC dell'arco a tre cerniere	15
14	Deformata della trave	15
15	Maglia triangolare	18
16	Maglia triangolare: Struttura1, aste 1,2 e 2,3	19
17	Maglia triangolare: Struttura2, aste 1,2 e 2,3	19
18	Struttura1	20
19	Struttura2	21
20	Grafici ottenuti dalle misurazioni per la StrutturaA	21
21	Grafici ottenuti dalle misurazioni per la StrutturaB	22
22	Capriata all'italiana	23
23	Immagine stilizzata della capriata all'italiana tridimensionale	24
24	Capriata all'italiana nel caso senza supporti: aste 1,4 2,4	24
25	Capriata all'italiana nel caso senza supporti: 1,2 4,6 2,6	25
26	Supporto verticale	25
27	Capriata all'italiana nel caso di supporti con aste intermedie: aste 1,4 e 2,4	26
28	Capriata all'italiana nel caso di supporti con aste intermedie: aste 1,2, 4,6 e 2,6	26
29	Capriata all'italiana nel caso di supporti collegati direttamente alla struttura: aste 1,2, 1,4 e 2,4	27
30	Capriata all'italiana nel caso di supporti collegati direttamente alla struttura: aste 4,6, 1,4 e 2,6	28
31	Modellino della capriata all'italiana	28

32	Trave di Howe	29
33	Trave di Howe: aste 3,4 e 7,4	30
34	trave di Howe: aste 4,5 e 7,8	30
35	Trave di Howe: aste 5,8 e 4,8	31
36	Trave di Howe: asta 3,7	31
37	Modellino della trave di Howe	31
38	Trave di Pratt	32
39	Trave di Pratt: asta 4,5	33
40	Trave di Pratt: aste 3,8 e 7,8	33
41	Trave di Pratt: aste 3,4 e 3,7	34
42	Trave di Pratt: 5,8 e 4,8	34
43	Modellino della trave di Pratt	34
44	Travatura di Mohniè	35
45	Travatura di Mohniè: aste 3,9, 8,9 e 3,4	36
46	Travatura di Mohniè: aste 4,5, 4,9 e 3,8	36
47	Travatura di Mohniè: aste 4,10, 5,10 e 9,10	37
48	Modellino della trave di Mohniè	37
49	Capriata all'italiana: a) modello; b) esempio di utilizzo nel sostegno del tetto della sacrestia nella Chiesa di Santa Croce in Firenze. Foto tratta dal sito ufficiale del portale Flickr	40
50	Trave di Mohniè: a) modello; b) esempio di utilizzo nel sovrappeso ferroviario di Parco Leonardo in Fiumicino	40
51	Trave di Howe: a) modello; b) esempio nel Ponte Queen Elizabeth 2 in Dartford nel regno Unito. Foto tratta dal sito ufficiale del portale iStock	41
52	Trave di Pratt: a) modello; b) esempio di utilizzo nel Ponte 2 Giugno in Fiumicino. Foto tratta dal sito de: "Il Faro online"	41

Elenco delle tabelle

1	Sollecitazioni della maglia triangolare calcolate attraverso il metodo dei nodi	18
2	Sollecitazioni interne nel caso di Struttura1	20
3	Sollecitazioni interne nel caso di Struttura2	20
4	Sollecitazioni interne della StrutturaA	21
5	Sollecitazioni interne della StrutturaB	22
6	Capriata all'italiana: sollecitazioni calcolate con il metodo dei nodi	23
7	Capriata all'italiana: sollecitazioni nel caso senza supporti	24
8	Capriata all'italiana: sollecitazioni nel caso di collegamento ai supporti attraverso aste	26
9	Capriata all'italiana: errori nel caso si supporti collegati con aste intermedie	27
10	Capriata all'italiana: sollecitazioni nel caso di collegamento ai supporti direttamente ai nodi	27
11	Capriata all'italiana: errori nel caso di supporti collegati direttamente alla struttura	28
12	Trave di Howe: sollecitazioni calcolate con il metodo dei nodi	29
13	Trave di Howe: sollecitazioni interne ottenute dagli esperimenti	30
14	Trave di Pratt: sollecitazioni calcolate con il metodo dei nodi	32
15	Trave di Pratt: sollecitazioni interne ottenute dagli esperimenti	33
16	Travatura di Mohniè: sollecitazioni interne calcolate con il metodo dei nodi	35
17	Travatura di Mohniè: sollecitazioni ottenute dagli esperimenti	36

Introduzione

Nell'ambito del corso di Scienza delle Costruzioni, ho avuto modo di studiare diversi tipi di strutture e analizzarle dal punto di vista della risposta strutturale a carichi applicati. Mi è stata data l'opportunità di approfondire alcuni dei concetti del corso attraverso l'attrezzatura della PASCO *Scientific* messa a disposizione dal dipartimento di Ingegneria Civile. Questo lavoro si orienta verso lo studio delle strutture reticolari in concomitanza a quanto svolto dallo studente Davide Renzi nella propria Tesi di Laurea. Il progetto è mirato a ragazzi delle scuole superiori, nell'ambito dell'alternanza scuola-lavoro, con il fine ultimo di introdurli al mondo dell'Ingegneria attraverso lo studio delle travature reticolari. L'aspetto teorico è stato curato dallo studente Renzi nel suo lavoro, mentre io mi sono occupato della parte pratica, quale realizzare materialmente le strutture studiate nella teoria e condurvi esperimenti con il fine di poter confrontarne i risultati con quelli ottenuti dallo studio teorico. Prima di parlare di quanto studiato e appreso nel laboratorio durante le sperimentazioni, ho voluto approfondire l'analisi di una struttura reticolare iperstatica introducendo quello che è il metodo delle deformazioni. Tale argomento si articola in diversi punti e prende altrettante direzioni in merito all'analisi statica e dinamica della struttura. In questo contesto ho voluto scandire solamente gli strumenti necessari al tipo di analisi svolta, prendendo in considerazione solo alcuni dei punti fondamentali del metodo. Le altre sezioni hanno lo scopo di mostrare l'attrezzatura utilizzata, classificarla e spiegarne il funzionamento. Inoltre mostrano le modalità di realizzazione delle strutture e dell'utilizzo dei dispositivi elettronici messi a disposizione, come anche l'interfaccia del programma PASCO CAPSTONE utile alla rilevazione delle sollecitazioni. Dopo aver introdotto il metodo delle deformazioni si passa allo studio dell'arco a tre cerniere iperstatico mediante quest'ultimo, e al problema dell'analisi di una struttura bidimensionale attraverso un modello tridimensionale. Successivamente verranno mostrati alcuni degli esempi proposti agli studenti, quali la maglia triangolare, la Capriata all'italiana, la trave di Howe, la trave di Pratt e la travatura di Mohniè e se ne studierà la risposta strutturale in conseguenza all'applicazione di uno o più carichi. Per ognuno degli esercizi verranno confrontati i risultati ottenuti sperimentalmente con quelli ricavati dal metodo dei nodi. Per i primi esperimenti sono state introdotte diverse considerazioni riguardo il modo di studiare il modellino, con il fine di mostrare agli studenti quali possono essere tipici errori da non commettere e di sanarne eventuali dubbi.

Ringrazio il professor Fabrizio Paolacci per aver messo a disposizione del Dipartimento di Ingegneria Meccanica il kit PASCO e per avermi dato l'opportunità di confrontarmi con la sperimentazione di quest'ultimo.

Prima parte: Realizzazione dei modellini

Per effettuare gli esperimenti descritti in seguito, mi è stato messo a disposizione dal dipartimento di Ingegneria di Roma Tre il *Large structure set* della Pasco Structures system. Il kit fornisce una vasta gamma di aste di diverse dimensioni e di giunzioni che permettono di collegare suddette aste con una diversa angolazione relativa. Questo genere di pezzi sono realizzati in materiale ABS e sono mostrati in Figura 1. Le aste presentano diversa lunghezza, ma uguale larghezza e spessore.

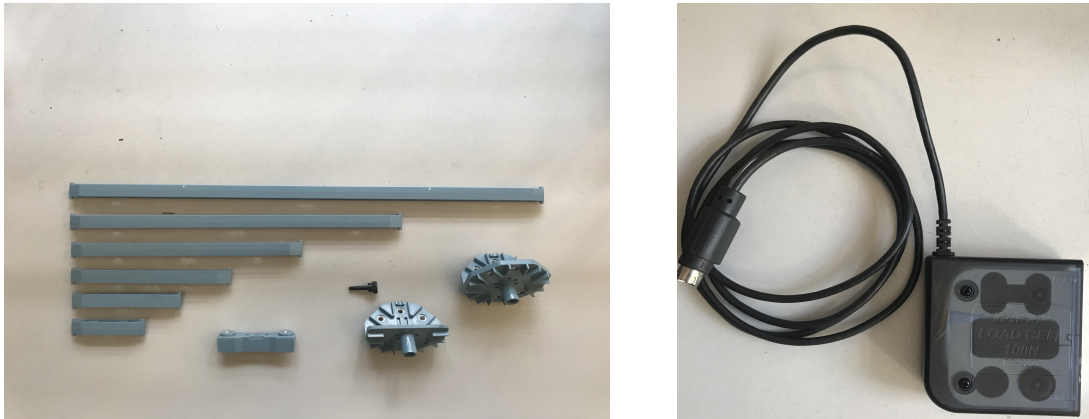


Figura 1: Componenti utilizzati per la realizzazione delle strutture

Dopodichè abbiamo diverse aste metalliche e una guida di plastica utile per applicazioni di carichi mobili. Inoltre vengono fornite celle di carico atte a rilevare gli sforzi presenti nella struttura. Ognuna di esse è tarata su una sensibilità di 5 N o di 100 N. Abbiamo due importanti componenti elettronici quali un amplificatore di segnale (Figura 2) e un'interfaccia universale 850 (Figura 3).



Figura 2: Amplificatore



Figura 3: Interfaccia universale 850

Oltre l'analisi statica, il set permette di effettuare anche l'analisi dinamica di una struttura, nonché di misurarne eventuali sollecitazioni oscillatorie attraverso un driver meccanico di onde. Tuttavia è di nostro interesse la sola analisi statica dato che gli esperimenti sono destinati ad essere confrontati con risultati ottenuti dalla teoria bidimensionale dell'analisi di strutture reticolari isostatiche, alle quali sono applicati solo carichi statici.

Per analizzare la risposta strutturale delle strutture ci si serve di un programma proprietario PASCO chiamato PASCO CAPSTONE, che si presenta con l'interfaccia mostrata in Figura 4.

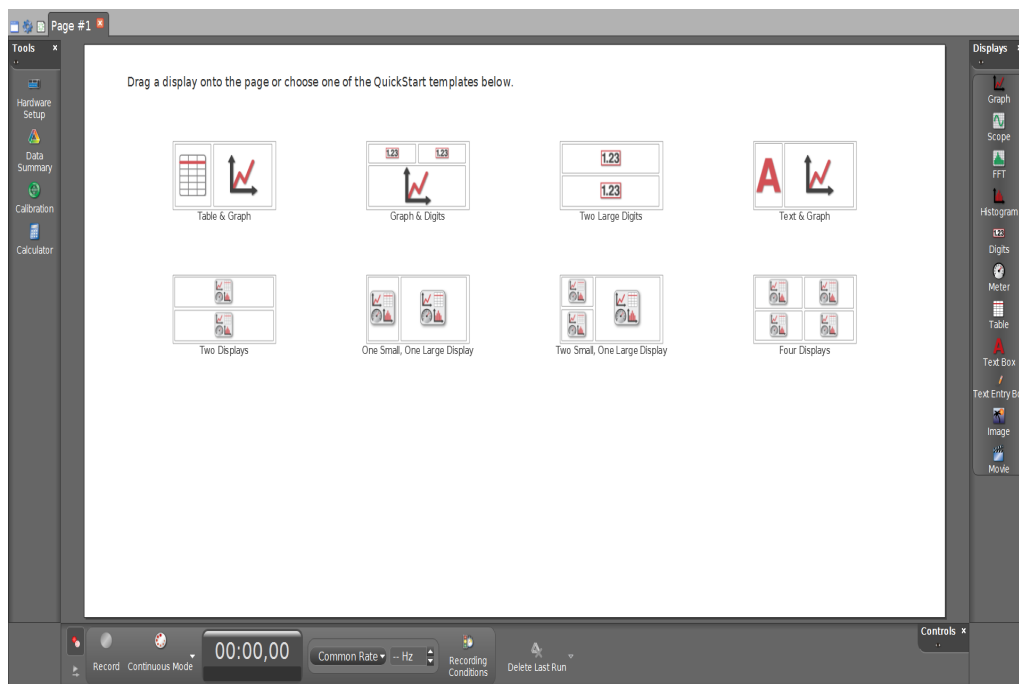


Figura 4: Interfaccia iniziale del programma PASCO CAPSTONE

Il programma fornisce diversi comandi che offrono un'ampia analisi delle forze rilevate

dalle celle di carico. Innanzitutto è necessario settare il numero e la tipologia di grafici che si vogliono ottenere. È possibile avere un output sui valori recepiti dalle celle in diverse fattezze, tra cui grafici Forza-tempo, indicatori di frequenza o indicatori di valori approssimabili fino a dieci cifre decimali per quanto riguarda le sollecitazioni. Nei miei esperimenti ho deciso di presentare, per ogni struttura, un grafico che genera sulle ordinate il valore di una forza in [N] e sulle ascisse un tempo in [s], e una cella con un valore approssimato a due cifre decimali della forza rilevata. Si ricorda che le strutture sono molto lontane dall'essere ideali e sono state costruite e studiate in un ambiente insito di imperfezioni e piccole sollecitazioni ambientali, ma non trascurabili. C'è anche da considerare il rumore generato dalla struttura e i momenti parassiti che nascono sulle celle di carico, dovuti alle viti che le tengono connesse alle aste. Per tutti questi motivi non si avranno valori costanti, ma si otterranno oscillazioni di pochi decimi se non centesimi di Newton attorno ad un valore. C'è da dire anche che il programma segue la convenzione per cui la compressione è rappresentata da un valore positivo mentre la trazione da un valore negativo.

Prima di procedere con la rilevazione dei dati è necessario tarare l'amplificatore in modo tale che restituisca all'interfaccia 850 un segnale nullo quando alla struttura non è applicato alcun carico. Un apposito pulsante sull'amplificatore ci consente di ottenere questo risultato. Ogni asta è stata prima misurata a struttura scarica, poi con il carico posto nella mezz'asta di collegamento tra due nodi speculari e poi con il peso poggiato direttamente sul nodo (Figura 7). Tutte e tre le misurazioni sono state riportate sullo stesso grafico e per ognuna si è scelto un valore approssimativo della forza normale preso come riferimento tra quelli variabili, con due cifre significative dopo lo zero. Questo valore sarà quello utilizzato per il confronto con i risultati dell'analisi teorica sviluppata con il metodo dei nodi.

La scelta di porre attenzione anche al caso in cui il peso viene posto sul nodo stesso, come appoggiato, anche se sembrerebbe inutile dal punto di vista scientifico, è stata fatta consapevolmente per far capire come e perchè sia sbagliato analizzare le sollecitazioni interne in questo caso. Gli esperimenti saranno infatti indirizzati a studenti liceali che si stanno confrontando con questi argomenti per la prima volta nella loro carriera accademica, ritengo quindi opportuno mostrargli ciò che è sbagliato fare, oltre a ciò che è corretto.

Le strutture sono state studiate teoricamente nel caso più ideale possibile, ovvero quello in cui sono isostatiche e in cui le forze sono applicate esattamente ai nodi. In più si deve considerare il fatto che vengono studiate bidimensionalmente, mentre la sperimentazione viene fatta su strutture tridimensionali. Per rendere il risultato più vicino possibile al caso di due dimensioni si costruisce la struttura due volte e si collegano i nodi con delle aste di uguale lunghezza in modo tale da avere una struttura simmetrica. A questo punto è interessante notare come cambino i risultati a seconda di dove si posiziona il carico, ovvero se si mette al centro dell'asta di collegamento dei nodi, oppure sul nodo stesso. Il carico consiste in diversi pesi da 0.50 chilogrammi riposti su di un supporto con un gancio, anch'esso di circa 0.50 chilogrammi (Figura 5). Può essere quindi agganciato alle aste parallele al terreno oppure appoggiato sui nodi.



Figura 5: Gancio con disco, entrambi da 0.50 kg

È chiaro che a seconda della scelta effettuata la forza applicata sul nodo cambia. Supponendo di utilizzare una massa X , se questa è poggiata direttamente sul nodo avremmo una forza \vec{F} diretta verticalmente verso il basso di modulo pari a $9.80 \cdot X$.

Particolare attenzione deve essere invece data al caso in cui il peso sia agganciato al centro della trave di giunzione tra i nodi. Così facendo, infatti, il carico a cui sono sottoposti detti nodi lo si può ricavare dalle caratteristiche della sollecitazione della trave stessa. Ci troviamo tuttavia in un caso iperstatico tre volte, poiché, data la non idealità della situazione, si ha una trave doppiamente incastrata, con gli incastrati che sono in realtà incastrati interni. Si hanno quindi infinite soluzioni per quanto riguarda le reazioni vincolari. In realtà il risultato è che si generano solo due reazioni verticali e dirette verso l'alto in corrispondenza dei nodi, di modulo pari a $F/2$, ovvero a $4.90 \cdot X$.

Così facendo la trave risulta perfettamente equilibrata senza considerare sforzi normali e momenti flettenti. Dato che i vincoli sono in realtà incastrati interni, per ogni reazione verticale diretta verso l'alto se ne genererà una di pari intensità e uguale direzione, ma diretta verso il basso. In questo caso rispetto al precedente abbiamo allora uno sforzo concentrato sul nodo, il quale si avvicina molto di più al caso ideale studiato. I due casi sono mostrati in Figura 6.

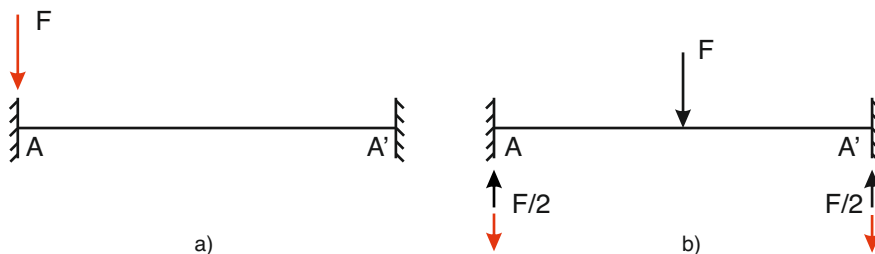


Figura 6: Trave di collegamento: a) carico applicato direttamente sul nodo; b) carico applicato nella mezzera dell'asta

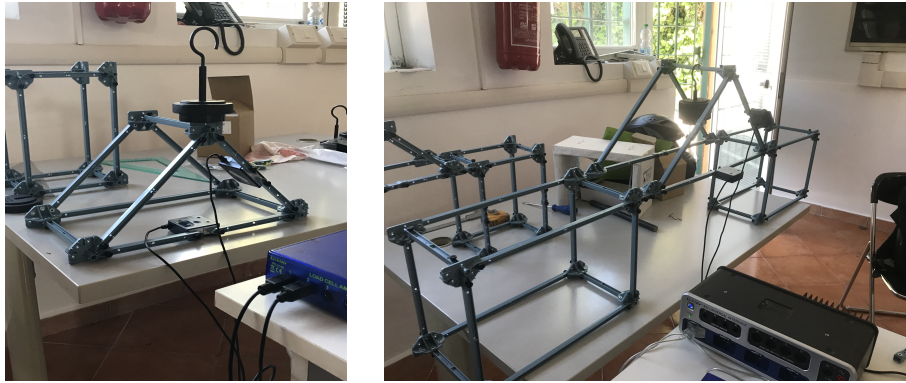


Figura 7: Carico applicato sul nodo e carico applicato sull'asta di collegamento

Seconda parte: Il metodo delle deformazioni

Dal corso di Scienza delle Costruzioni ho imparato ad analizzare strutture iperstatiche attraverso il metodo delle forze. Questo approccio funziona molto bene per strutture una o due volte iperstatiche, ma presenta notevoli difficoltà nel momento in cui si considerano traviature con più di due gradi di iperstaticità. Prima di procedere con l'analisi sperimentale delle strutture proposte e confrontarne i risultati con quelli teorici, ho voluto introdurre lo studio generale di una struttura reticolare dove tutti i nodi e i vincoli esterni sono degli incastrati, introducendo il *metodo delle deformazioni*.

Il vantaggio che questo approccio ci offre è quello di poter studiare ogni singola trave che compone la struttura singolarmente, in modo da ricavare le reazioni vincolari incognite e, quindi, le sollecitazioni interne. Questa metodologia fa riferimento a due casi possibili, quello in cui uno o più carichi sono applicati ai nodi della struttura oppure quello in cui vi sono dei carichi distribuiti o concentrati sulle travi. Nel mio studio farò riferimento solo al primo caso.

Il metodo delle deformazioni si basa sulla sovrapposizione di due effetti, un carico applicato su di un nodo della struttura e una deformazione di modulo unitario, come una rotazione ad esempio, in corrispondenza di quel nodo. Attraverso l'implementazione del principio dei lavori virtuali si riescono a ricavare le reazioni ai nodi esterni della trave. Tutto questo ragionamento si basa sulla rigidità flessionale delle travi, che viene studiata con due casi base di curvatura di una trave doppiamente incastrata tramite l'applicazione di un momento flettente alle estremità della stessa. In un caso avremmo che questi due momenti sono simmetrici, nell'altro i due momenti saranno antisimmetrici con un'ulteriore presenza di una forza di taglio. Considerando una trave di lunghezza l , doppiamente incastrata, il suo modulo di Young E ed il suo momento d'inerzia I rispetto all'asse principale, cominciamo con l'analisi del caso di curvatura simmetrica mostrato in Figura 8.



Figura 8: Asta doppiamente incastrata con curvatura simmetrica

Le rotazioni dei nodi sono uguali e opposte, mentre i due momenti applicati sono uguali in modulo. In questo modo il lavoro esterno viene calcolato come $\frac{1}{2}M_s\theta_s + \frac{1}{2}M_s\theta_s = M_s\theta_s$. Utilizzando il principio dei lavori virtuali si perviene alla seguente equazione:

$$M_s\theta_s = \int_0^l \frac{M(x)M(x)}{EI} ds = \frac{l}{EI} M_s^2 \quad (1)$$

Da cui si ottiene:

$$M_s = \frac{EI}{l} \theta_s \quad (2)$$

Mentre per il caso di curvatura antisimmetrica abbiamo la situazione mostrata in Figura 9.

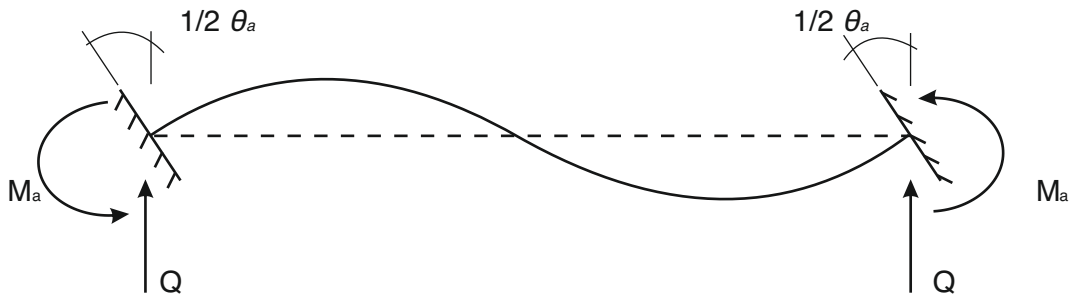


Figura 9: Asta doppiamente incastrata con curvatura antisimmetrica

In questo caso abbiamo un momento esterno pari a $2M_a$ mentre l'intensità della forza di taglio \vec{Q} è pari a $2M_a/l$. Anche in questo caso il lavoro esterno sarà pari a $\frac{1}{2}M_a\theta_a + \frac{1}{2}M_a\theta_a = M_a\theta_a$. Il lavoro interno invece sarà arricchito del contributo della forza di taglio $Q(x)$, oltre che dal momento $M(x)$. Allora attraverso il principio dei lavori virtuali si ottiene la seguente equazione:

$$\theta_a M_a = \int_0^l \left\{ \frac{M(x)M(x)}{EI} + \frac{Q(x)Q(x)}{GA_s} \right\} ds = \frac{l}{3EI} M_a^2 + \frac{l}{GA_s} Q^2 \quad (3)$$

dove A_s è l'area della sezione trasversale della trave.

Sostituendo il valore del taglio Q espresso in termini di momento M_a nell'espressione (3), si ottiene:

$$\theta_a = \frac{l}{3EI} \left(1 + \frac{12EI}{GA_s l^2} \right) M_a \quad (4)$$

dove il secondo termine tra parentesi rappresenta il contributo della forza di taglio alla flessione della trave e viene indicato con ϕ . L'equazione (4) viene allora scritta come:

$$M_a = \frac{3EI}{l(1 + \phi)} \theta_a \quad (5)$$

Mentre la relativa forza di taglio Q risulta:

$$Q = \frac{6EI}{l^2(1 + \phi)} \theta_a \quad (6)$$

I due momenti per il caso simmetrico e antisimmetrico vengono combinati per individuare le sollecitazioni interne di una trave iperstatica in cui vi è una deformazione imposta su uno dei suoi nodi, dove per "nodo" si intende l'inizio o la fine della stessa.

Si studia ora un caso pratico di una trave tre volte iperstatica in cui è imposta una rotazione iniziale unitaria ad uno dei due nodi della trave. Consideriamo la trave mostrata in Figura 10.

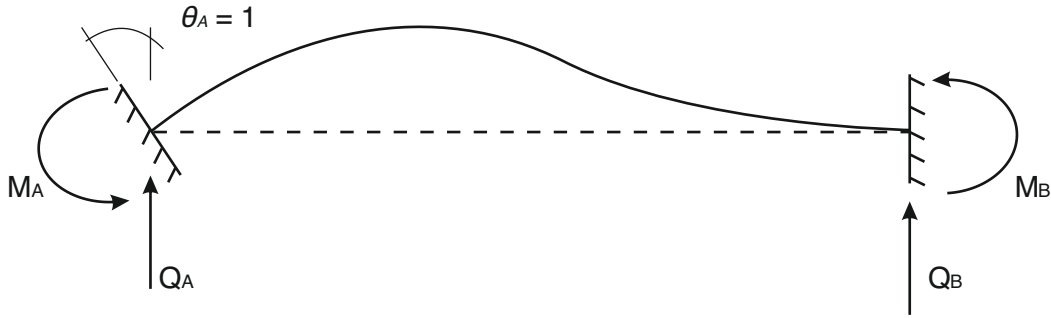


Figura 10: Esempio di una rotazione unitaria imposta al nodo A

I momenti alle estremità della trave possono essere scritti come:

$$M_A = -M_s + M_a, \quad M_B = M_s + M_a. \quad (7)$$

Facendo riferimento a quanto visto prima per le travi a curvatura simmetrica e antisimmetrica si ricavano le rotazione degli estremi A e B come:

$$\theta_A = -\frac{1}{2}\theta_s + \frac{1}{2}\theta_a, \quad \theta_B = \frac{1}{2}\theta_s + \frac{1}{2}\theta_a = 0. \quad (8)$$

Si ha quindi che:

$$\theta_a = -\theta_s = \theta_A = 1. \quad (9)$$

Mentre per quanto riguarda i momenti, sostituendo in (7) le espressioni (2) e (5) si ricava:

$$M_A = \frac{EI}{l} + \frac{3EI}{(1+\phi)l} = \frac{4+\phi}{1+\phi} \frac{EI}{l} \quad (10)$$

$$M_B = -\frac{EI}{l} + \frac{3EI}{(1+\phi)l} = \frac{2-\phi}{1+\phi} \frac{EI}{l} \quad (11)$$

Avendo $\theta_A = 1$, per il taglio si ottiene:

$$Q = \frac{6EI}{l^2(1+\phi)} \quad (12)$$

Si sono quindi ricavate facilmente tutte le reazioni dei vincoli. Ora si potranno trovare le caratteristiche della sollecitazione. In generale si tende comunque a trascurare il termine ϕ sia per quanto riguarda lo sforzo di taglio che il momento flettente.

Una procedura identica si applica a qualsiasi altro caso di trave più volte iperstatica con vincoli diversi dai due incastri e deformazioni non necessariamente considerate quali rotazioni. Un caso interessante è quello in cui la deformazione assegnata sia una traslazione, di modulo unitario, di un nodo verso l'alto, o verso il basso. Tale situazione si risolve con lo stesso procedimento visto ora, infatti uno spostamento $u_A = 1$ verso il basso viene associato ad una rotazione in senso antiorario di un angolo θ_A tale che si abbia $\frac{1}{2}\theta_A = \frac{1}{l}$, dove l è la lunghezza della trave. Questo è il caso di nostro interesse, dato che l'analisi dell'arco a tre cerniere iperstatico prevede traslazioni di un estremo verso il basso. Per la trave mostrata in Figura 11, abbiamo che:

$$M_A = M_B = \frac{6EI}{l^2} \quad (13)$$

$$Q_A = Q_B = \frac{12EI}{l^3} \quad (14)$$

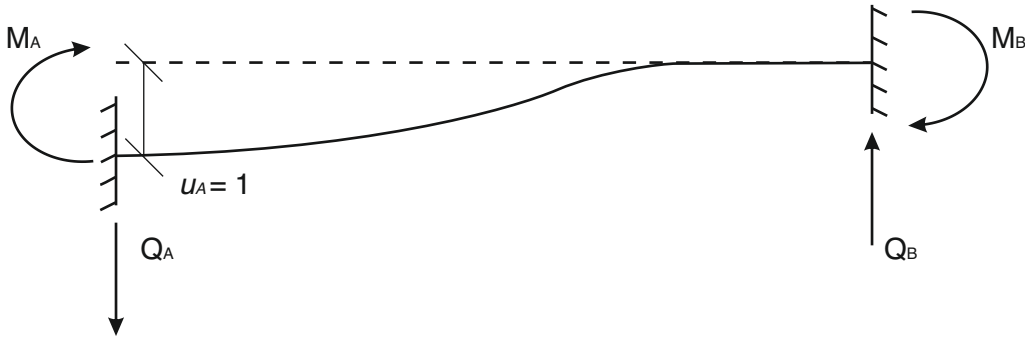


Figura 11: Traslazione del nodo A verso il basso

Quando si hanno più travi collegate in un nodo, che sia un incastro interno o un altro tipo di vincolo interno, e si vuole utilizzare il metodo delle deformazioni, sarà necessario considerare le travi separatamente, studiarle con i casi elementari di cui sopra e poi sovrapporne gli effetti in termini di sollecitazioni e deformazioni in corrispondenza del punto di giunzione.

Terza parte: Il problema della struttura reale

Le strutture studiate nel modello teorico attraverso il metodo dei nodi rispettano la legge $2n_n = n_a + n_{ve}$, dove:

- n_n è il numero dei nodi;
- n_a è il numero delle aste;
- n_{ve} è il numero dei vincoli esterni.

Questo significa che tali strutture sono isostatiche.

Dato il tipo di materiale messo a disposizione, la realizzazione dei modellini mette in risalto un evidente problema, ovvero quello di dover costruire una struttura che in realtà è iperstatica. Questo accade a causa della tridimensionalità dell'oggetto in questione, che rende necessaria la presenza di incastri interni lì dove dovrebbero essere presenti cerniere interne e vincoli esterni, come cerniere o carrelli. Infatti le strutture sono state realizzate con aste rigide, di lunghezza diversa, ma di spessore e larghezza uguali, collegate tra di loro da organi di connessione dotati di diverse guide, tali da permettere l'inclinazione reciproca tra le aste di angoli di 45° , 90° , 135° , 180° , 225° , 270° e 315° . Oltre al fatto che per studiare la struttura in tre dimensioni è necessario costruirne due "piane" uguali e collegarle tra di loro attraverso aste di collegamento poste in corrispondenza dei nodi. Quello che vorremmo è che i risultati ottenuti dalle misurazioni siano il più possibile vicini a quelli ottenuti dal metodo dei nodi per una struttura piana. Per analizzare al meglio le travature tridimensionali e capire cosa approssimare e come farlo affinché ci si avvicini al caso ideale, partiamo con lo studiare una struttura elementare, quale l'arco a tre cerniere, reso iperstatico dalla sostituzione delle cerniere con degli incastri come mostrato in Figura 12.

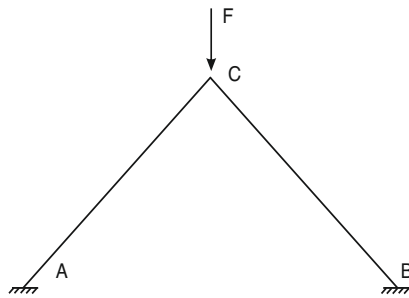


Figura 12: Arco a tre cerniere iperstatico

La struttura è soggetta ad un carico verticale \vec{F} in corrispondenza del punto C ed è tre volte iperstatica. Studiamo come la struttura reagisce alla presenza del carico e quali sono le reazioni dei vincoli esterni e le sollecitazioni che si generano nelle aste.

Per fare ciò si fa riferimento al metodo delle deformazioni, atto proprio all'analisi di travature iperstatiche. Si consideri una trave doppiamente incastrata soggetta ad un carico verticale concentrato in corrispondenza di uno dei due incastri come mostrato in Figura 13.



Figura 13: Trave BC dell'arco a tre cerniere

La situazione che si viene a creare è la seguente:

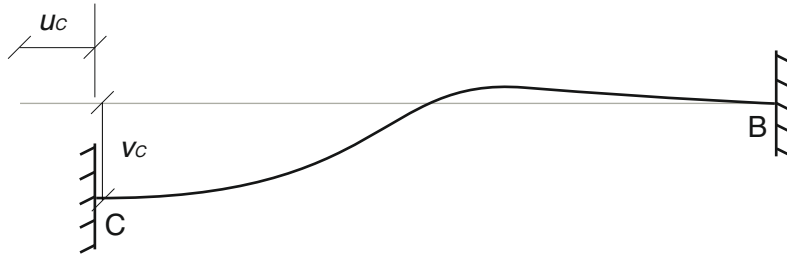


Figura 14: Deformata della trave

La trave risulta tre volte iperstatica, ci sono quindi tre reazioni sovrabbondanti che generano un numero infinito di soluzioni per quanto riguarda le reazioni stesse. Il metodo delle deformazioni, di tutte le possibili combinazioni di soluzioni, sceglie quelle che sono congruenti con le deformazioni assegnate. In questo caso agisce sulla trave anche una forza normale di compressione, oltre al fatto che in corrispondenza dei vincoli C e B si generano una forza di taglio Q e un momento M_t . Questo caso corrisponderebbe al caso di curvatura antisimmetrica visto nella sezione precedente. La forza normale in realtà influenza sia il momento che il taglio attraverso un parametro k , tale che:

$$k^2 = -\frac{N}{EI} \quad (15)$$

N influenza il taglio e il momento sia nel caso di curvatura simmetrica che antisimmetrica. Nel primo caso avremmo che il momento agli estremi della trave risulta:

$$M_s = \gamma \frac{\theta_s}{EI} l \quad (16)$$

Dove:

$$\gamma(kl) = \left(\frac{1}{2}kl\right) \cot\left(\frac{1}{2}kl\right) \quad (17)$$

è detto coefficiente di rigidezza nel caso di curvatura simmetrica. Il caso in cui invece $\gamma(0) = 1$ è il caso limite in cui non abbiamo sforzi normali, ed è stato studiato precedentemente. Il coefficiente di rigidezza varia in funzione del rapporto tra carico assiale applicato e carico di Eulero (P_E), definito come carico assiale limite che una trave può sopportare prima di andare incontro a rottura. Quando il rapporto $\frac{N}{P_E}$ è maggiore di 1

il coefficiente di rigidezza risulta negativo. Quando invece trattiamo il caso di curvatura antisimmetrica abbiamo che:

$$M_a = \psi \frac{3EI}{l} \theta_a \quad (18)$$

Dove:

$$\psi(kl) = \frac{\frac{1}{12}(kl)^2}{1 - \gamma} \quad (19)$$

è detto coefficiente di rigidezza nel caso di curvatura antisimmetrica. Come quello precedente anche ψ decresce con l'aumentare dello sforzo normale applicato. In questo caso, però, diventa negativo quando lo sforzo assiale raggiunge il valore di $4P_E$.

Nel caso di nostro interesse, presentato nelle figure 13 e 14, considerando solamente lo spostamento v_C , calcoliamo il momento di reazione e lo sforzo di taglio in questo modo:

$$M_t = \psi \frac{6EI}{l^2} \quad (20)$$

$$Q = 12\gamma\psi \frac{EI}{l^3} \quad (21)$$

Sia l'asta BC che l'asta AC corrispondono al caso presentato in Figura 13; il carico \vec{F} si ripartisce quindi su entrambe in corrispondenza del punto C, tale che:

$$F = \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma\psi \frac{12EI}{l^3} v_C + \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma\psi \frac{12EI}{l^3} v_C = \gamma\psi \frac{12\sqrt{2}EI}{l^3} v_C \quad (22)$$

Questo significa che lo spostamento lungo y del punto C è pari a:

$$v_C = \frac{\sqrt{2}Fl^3}{24EI} \frac{1}{\gamma\psi} \quad (23)$$

Nell'equazione (22) i coefficienti di v_C rappresentano la componente dello sforzo di taglio relativa alle aste AB e BC. Sostituendo quanto trovato nell'equazione (21) nella (22), avremmo proprio che:

$$Q_C = Q_B = \frac{F}{2} \quad (24)$$

Per calcolare lo spostamento u_C si fa invece riferimento al problema della linea elastica che sfrutta l'accostamento delle equazioni costitutive a quelle indefinite di equilibrio e alle equazioni di congruenza. Di seguito vengono riportati questi tre gruppi di equazioni:

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA} \\ \chi(z) = \frac{M(z)}{EI} \\ \gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t} \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases} \quad (27)$$

Per calcolare u_C facciamo riferimento alle sole equazioni che riguardano lo sforzo assiale. Dai sistemi (25), (26) e (27) si ottiene:

$$N(z) = EA w'(z) \quad (28)$$

Considerando che il modulo di F_x è pari $F \cos(45^\circ)$, possiamo assumere che lo sforzo normale all'interno dell'asta CB sia pari a:

$$N(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} F \quad (29)$$

Sostituendo la (29) nella (28) si ottiene:

$$w(l) = u_C = \frac{\sqrt{2}}{2EA} Fl \quad (30)$$

L'analisi attraverso il metodo delle deformazioni dà vita ad un problema visualizzabile come un sistema la cui matrice è la matrice di rigidezza della trave \mathbf{K} , che mette in relazione un vettore di sforzi \mathbf{p} con un vettore di spostamenti nodali \mathbf{u} , tale che:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Kp} \quad (31)$$

Il vantaggio di questo metodo è quello di rendere più facile l'analisi di queste strutture, se tuttavia i calcoli vengono implementati in un compilatore.

Quarta parte: Esperimenti

Di seguito vengono descritti gli esperimenti effettuati nel laboratorio didattico. Per ognuno vengono confrontati i risultati con quelli relativi alla stessa struttura studiata con il metodo dei nodi. I primi due casi analizzati hanno anche il fine di mostrare diverse varianti per quanto riguarda l'analisi strutturale, e i relativi risultati sperimentali che ne derivano. Dato che il programma genera valori negativi per quanto riguarda forze di trazione e positivi per quelle di compressione, contrariamente a quanto voluto dalla convenzione, per quanto riguarda i risultati ottenuti con il metodo dei nodi questi verranno riportati in valore assoluto per non generare confusione.

Per i risultati relativi all'utilizzo del metodo dei nodi si è fatto riferimento al lavoro di Davide Renzi.

Maglia triangolare

Come primo esempio proposto agli studenti abbiamo la maglia triangolare (Figura 15), che è difatti la struttura reticolare più elementare, dopo l'arco a tre cerniere. La maglia triangolare è composta da tre aste, un nodo interno visto come cerniera interna e due vincoli esterni quali un carrello e una cerniera. Le aste diagonali sono inclinate di 45 gradi rispetto all'orizzontale. Così la struttura risulta isostatica.

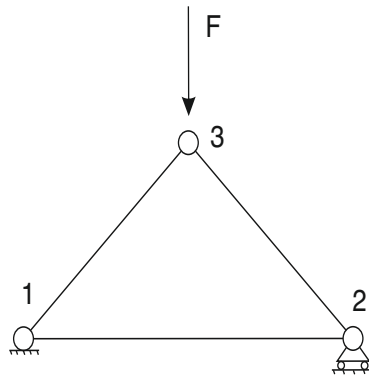


Figura 15: Maglia triangolare

Si applichi un carico \vec{F} sul nodo superiore diretto verticalmente verso il basso. Considerando un'intensità della forza pari a 9.80 N, attraverso il metodo dei nodi si ricavano i seguenti risultati (l'asta 2,3 è un puntone, mentre l'asta 1,2 è un tirante) :

Trave	Forza normale in modulo (N)
1,2	4.90
2,3	6.93

Tabella 1: Sollecitazioni della maglia triangolare calcolate attraverso il metodo dei nodi

Nel realizzarla praticamente con i pezzi PASCO si ha l'inconveniente di non poter riprodurre i vincoli esterni. Infatti quello che si fa è costruire una maglia triangolare dotata di incastri sia in corrispondenza dei vincoli esterni che dei nodi. Ovviamente il risultato ottenuto si discosta di molto dal caso studiato teoricamente, tuttavia gli esperimenti condotti dimostrano che le sollecitazioni normali delle aste si avvicinano di molto a quelle ottenute con il metodo dei nodi viste sopra. Utilizziamo allora una massa di due chilogrammi, prima agganciata sulla metà dell'asta di collegamento del nodo 3 con il suo speculare, e poi poggiata direttamente su detto nodo.

La maglia triangolare è stata collegata in corrispondenza dei nodi 1 e 2 a dei supporti verticali a forma di parallelepipedi. Questo tipo di collegamento è stato studiato in due diversi modi. Abbiamo il caso in cui i nodi corrispondono ai vertici stessi del supporto, ed il caso in cui nodo e vertice sono due punti distinti, collegati tra di loro attraverso un'asta orizzontale. Si vuole vedere quali dei due casi si avvicina di più alla struttura studiata teoricamente in termini di sollecitazioni interne. Chiamiamo "Struttura1" quella senza asta orizzontale e "Struttura2" quella con l'asta. Ricordando che, d'ora in poi, ogni struttura viene studiata nei due casi di applicazione del carico (su nodo e su asta di collegamento). Attraverso il programma PASCO Capstone si ottengono i seguenti risultati:



Figura 16: Maglia triangolare: Strutturata1, aste 1,2 e 2,3



Figura 17: Maglia triangolare: Strutturata2, aste 1,2 e 2,3

Ovvero:

Trave	Scarica (N)	Carico asta (N)	Carico nodo (N)
1,2	0.00	-5.58	-9.99
2,3	0.00	7.97	13.96

Tabella 2: Sollecitazioni interne nel caso di Struttura1

Per Struttura1.

Trave	Scarica (N)	Carico asta (N)	Carico nodo (N)
1,2	0.00	-5.72	-10.40
2,3	0.00	8.40	14.88

Tabella 3: Sollecitazioni interne nel caso di Struttura2

Per Struttura2.

Ricordiamo che questi non sono valori esatti. Le celle di carico risentono delle oscillazioni proprie della struttura e del carico appeso all'asta di collegamento, quindi il valore rilevato oscilla attorno ad un numero con variazioni di pochi decimi di Newton.

Si nota come i risultati che più si avvicinano alla teoria sono quelli rilevati nel caso in cui i nodi 1 e 2 corrispondono al vertice del supporto verticale. Inoltre questo è un primo esempio in cui notiamo il distacco dai valori attesi per quanto riguarda la situazione di carico poggiato direttamente sul nodo 3. Ci aspetteremmo, infatti, che la forza normale segnalata sia il doppio di quella nel caso di carico sull'asta di collegamento.



Figura 18: Struttura1



Figura 19: Struttura2

Influenza delle dimensioni della maglia sulle sollecitazioni interne

Si vuole capire ora l'influenza delle dimensioni delle aste sulle forze che si generano su di esse. Abbiamo visto che, teoricamente, ogni trave è sottoposta alla sola forza di compressione o di trazione. Nella realtà dei fatti è tuttavia impossibile impedire l'insorgere di momenti flettenti e/o forze di taglio. Vediamo ora se in questo senso la lunghezza delle aste implichino la presenza di dette sollecitazioni in corrispondenza dei nodi, così da modificare il valore atteso della forza normale. Per la maglia triangolare se ne sono studiate due, una con dimensioni triplicate rispetto all'altra, comprese le aste di collegamento dei nodi per rendere la struttura tridimensionale. Chiamiamo "StrutturaA" quella con dimensioni minori e "StrutturaB" quella con dimensioni maggiori. I risultati che si ottengono data l'applicazione di un peso di due chilogrammi, prima sull'asta di collegamento e poi sul nodo 3 sono i seguenti:

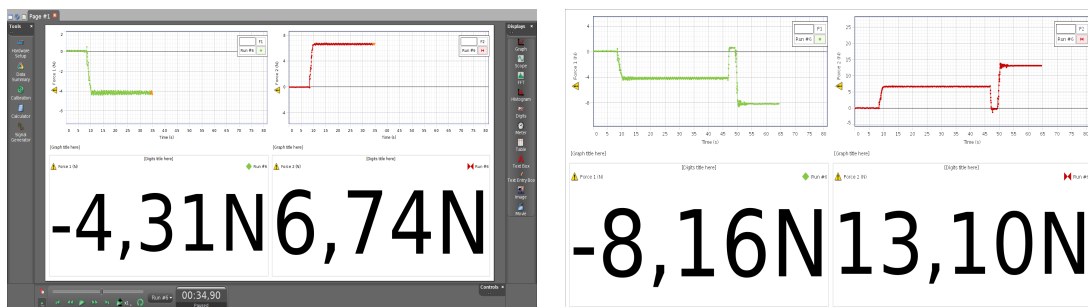


Figura 20: Grafici ottenuti dalle misurazioni per la StrutturaA

Trave	Struttura scarica (N)	Carico asta (N)	Carico nodo (N)
1,2	0.00	-4.31	-8.16
2,3	0.00	6.74	13.10

Tabella 4: Sollecitazioni interne della StrutturaA

Per quanto riguarda StrutturaA.



Figura 21: Grafici ottenuti dalle misurazioni per la StrutturaB

Trave	Struttura scarica (N)	Carico asta (N)	Carico nodo (N)
1,2	0.00	-5.58	- 9.99
2,3	0.00	7.97	13.96

Tabella 5: Sollecitazioni interne della StrutturaB

Per quanto riguarda StrutturaB.

Confrontando i risultati si nota che i moduli delle sollecitazioni sono minori nella struttura con dimensioni minori. Inoltre il caso in cui le sollecitazioni si avvicinano di più ai valori che desideriamo è quello della trave con dimensioni minori. Questo avviene probabilmente perchè l'unica dimensione di ogni asta ad essere variata è stata la sua lunghezza, ma non il suo spessore nè la sua larghezza. Anche se per la maglia triangolare si è ricavato che sono le dimensioni più piccole ad avvicinarsi al caso desiderato, per motivi pratici le successive strutture sono state realizzate con aste di dimensioni pari a quelle usate per StrutturaB. Tuttavia, come si vedrà, per gli altri modellini questa scelta si rivelerà corretta.

Capriata all'italiana

La struttura in questione è la Capriata all'italiana, mostrata in Figura 22. Questa è una struttura simmetrica, per cui sarà sufficiente studiarne solo la parte destra o sinistra. Il caso analizzato prevede l'applicazione di tre forze \vec{F} in corrispondenza dei nodi 4, 5 e 6. Le aste oblique sono inclinate di 45 gradi rispetto a quelle orizzontali e la forza deriva dall'applicazione di un carico di due chilogrammi in corrispondenza della metà dell'asta di collegamento dei nodi, tale che \vec{F} ha intensità pari a 9.80 N. Si sceglie di studiare questa struttura per seconda non a caso, infatti vengono presentati diversi casi di studio per quanto riguarda la capriata tridimensionale, quello in cui non è agganciata a supporti verticali, quello in cui è appunto sostenuta da supporti ma collegata ad essi tramite piccole aste orizzontali e, per ultimo, quello in cui la struttura è collegata direttamente ai supporti tramite i vertici superiori di questi ultimi. Ciò è stato fatto per mostrare le differenze tra

i metodi di collegamento e capire, anche per le altre strutture, prendendo questa come riferimento, quale sia il caso che più si avvicina alla teoria.

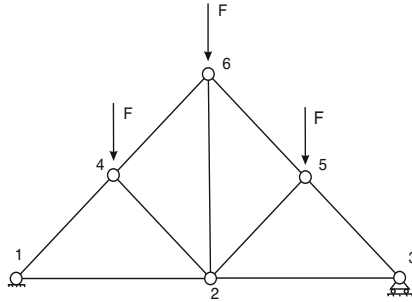


Figura 22: Capriata all'italiana

Considerando la struttura come un corpo rigido e vincolato esternamente solo da una cerniera e da un carrello, si ottengono due reazioni vincolari in corrispondenza di questi vincoli dirette verso l'alto e di modulo pari a $\frac{3F}{2}$. Si procede ora al metodo dei nodi per calcolare la sollecitazione normale interna alle travi. Si ottiene:

Trave	Forza normale in modulo (N)
1,4	20.79
1,2	14.70
4,6	13.85
2,4	6.93
2,6	9.80

Tabella 6: Capriata all'italiana: sollecitazioni calcolate con il metodo dei nodi

Risulta che le travi 1,4, 4,6 e 2,4 sono compresse, mentre la 1,2 e la 2,6 sono in trazione. Per quanto riguarda l'analisi pratica della struttura si è ricorso alla sola applicazione del peso nella mezzera dell'asta di collegamento, ma non al peso poggiato direttamente sui nodi. Questo deriva dall'impossibilità fisica di far rimanere in equilibrio i dischi sui nodi, data la forma della struttura. Anche in questo caso sono state fatte diverse misurazioni per vedere come cambiassero i risultati a seconda di come venisse posizionata la capriata, ovvero quando è completamente appoggiata su di un piano oppure quando è collegata a dei supporti verticali in corrispondenza dei vincoli esterni, che anche in questo caso sono realizzati con incastri.

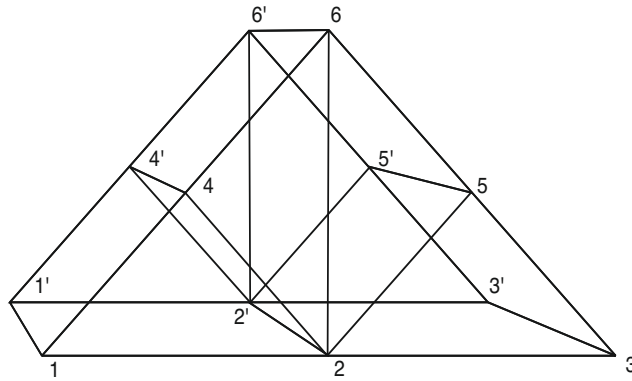


Figura 23: Immagine stilizzata della capriata all'italiana tridimensionale

Per il caso relativo all'assenza di supporti verticali si sono ottenuti i seguenti risultati:

Trave	Scarica (N)	Carico asta (N)
1,4	0.00	6.26
1,2	0.00	-12.13
4,6	0.00	11.70
2,4	0.00	6.81
2,6	0.00	-7.08

Tabella 7: Capriata all'italiana: sollecitazioni nel caso senza supporti

I grafici generati dal programma vengono riportati di seguito:



Figura 24: Capriata all'italiana nel caso senza supporti: aste 1,4 2,4

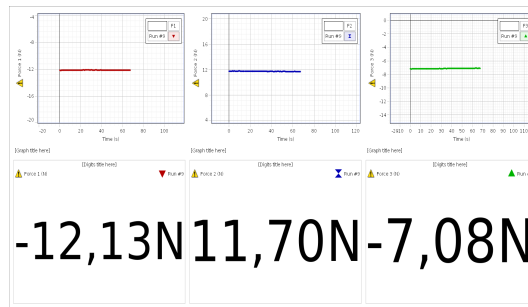


Figura 25: Capriata all'italiana nel caso senza supporti: 1,2 4,6 2,6

Poggiando l'intera struttura su di un piano, i vincoli esterni non sarebbero più due (quelli corrispondenti ai nodi 1 e 3), ma ne risulterebbero tre, dove il terzo è proprio quello corrispondente al nodo 2. Quindi la struttura risentirebbe di tre reazioni vincolari che si "dividono" il carico, in modulo pari a $3F$, da equilibrare. In questo modo tutte le sollecitazioni interne risulterebbero deviate dal loro reale valore. Confrontando i risultati di cui sopra con quelli ottenuti dal metodo dei nodi si nota, difatti, una notevole differenza tra i moduli delle forze interne.



Figura 26: Supporto verticale

I supporti verticali sono realizzati come dei parallelepipedi (Figura 26). Sui vertici in alto viene collegata la struttura in esame. Questo collegamento è stato realizzato in due modi, con una piccola asta orizzontale che collega il vertice del supporto al nodo corrispondente al vincolo esterno della struttura, o direttamente al vertice del sostegno. Allora per il primo caso otteniamo i seguenti risultati:

Trave	Scarica (N)	Carico asta (N)
1,4	0.00	23.91
1,2	0.00	-18.02
4,6	0.00	16.21
2,4	0.00	8.56
2,6	0.00	-12.86

Tabella 8: Capriata all'italiana: sollecitazioni nel caso di collegamento ai supporti attraverso aste

Derivati dai seguenti grafici:

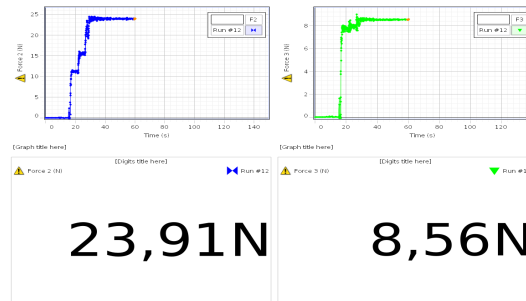


Figura 27: Capriata all'italiana nel caso di supporti con aste intermedie: aste 1,4 e 2,4

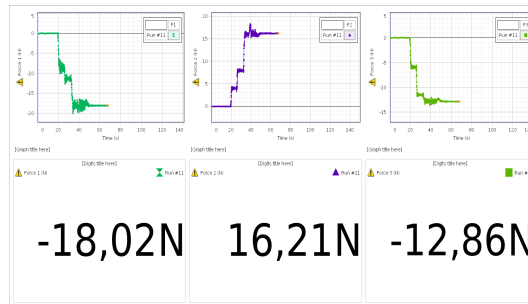


Figura 28: Capriata all'italiana nel caso di supporti con aste intermedie: aste 1,2, 4,6 e 2,6

Confrontiamo i risultati considerando la percentuale di errore che viene a crearsi:

$$E\% = \frac{|S_n - S_e|}{S_n} \cdot 100 \quad (32)$$

Dove S_n è il valore relativo al calcolo attraverso il metodo dei nodi ed S_e quello riferito agli esperimenti. Otteniamo allora i seguenti errori:

Trave	Errore
1,4	15%
1,2	22.5%
4,6	17%
2,4	23.5%
2,6	31.22%

Tabella 9: Capriata all'italiana: errori nel caso si supporti collegati con aste intermedie

In questo caso abbiamo dei valori più alti di quelli ottenuti dal metodo dei nodi. Con tutta probabilità questo è dovuto proprio al tipo di collegamento che si è posto in corrispondenza dei nodi 1 e 3. Infatti, data la presenza di piccole aste orizzontali che collegano i nodi esterni ai vertici dei sostegni, la reazione che vi si genera non sarà perfettamente verticale e diretta verso l'alto, ma sarà influenzata dalla flessione dell'asta di collegamento. Si genererebbe infatti una sollecitazione di taglio lungo detta asta, che porterebbe all'insorgere di un momento di reazione in corrispondenza del nodo dove si è ipotizzato il vincolo esterno.

Per il secondo caso invece:

Trave	Scarica (N)	Carico asta (N)
1,4	0.00	21.40
1,2	0.00	-15.65
4,6	0.00	13.52
2,4	0.00	6.90
2,6	0.00	-9.61

Tabella 10: Capriata all'italiana: sollecitazioni nel caso di collegamento ai supporti direttamente ai nodi

Ed i grafici:

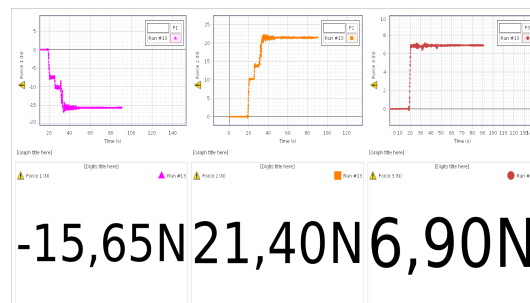


Figura 29: Capriata all'italiana nel caso di supporti collegati direttamente alla struttura: aste 1,2, 1,4 e 2,4

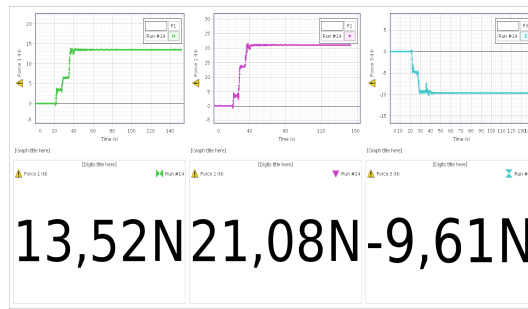


Figura 30: Capriata all'italiana nel caso di supporti collegati direttamente alla struttura: aste 4,6, 1,4 e 2,6

Riferendoci all'espressione (32) otteniamo i seguenti errori nel confronto:

Trave	Errore
1,4	2.93%
1,2	6.4%
4,6	2.38%
2,4	0.43%
2,6	1.93%

Tabella 11: Capriata all'italiana: errori nel caso di supporti collegati direttamente alla struttura

Come si può ben vedere, il secondo caso presenta percentuali di errore notevolmente inferiori al primo e, quindi, valori che si avvicinano di più a quelli ottenuti dall'analisi piana della struttura.

Data l'analisi di questi primi due modellini, per le successive strutture si tratterà solo il caso di collegamento ai supporti effettuato direttamente tra le aste ed il nodo superiore del supporto.

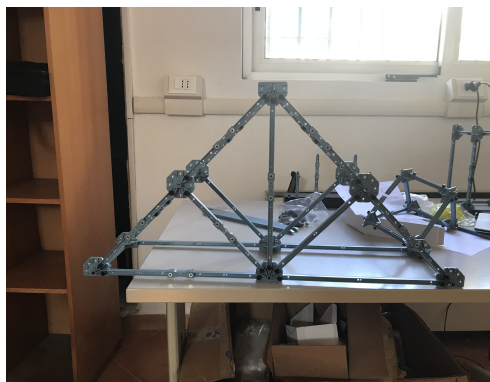


Figura 31: Modellino della capriata all'italiana

Trave di Howe

Si analizza ora la trave di Howe, Figura 32. La struttura è formata da otto nodi e 13 aste, ed è poggiata su di una cerniera esterna e un carrello esterno. Vi è un solo carico applicato, rappresentato dal vettore \vec{F} . Data la tridimensionalità dell'oggetto, e la limitazione che abbiamo nella costruzione di esso, dobbiamo limitarci a considerare i vincoli esterni come incastri. Questo renderebbe la struttura iperstatica, ma, come vedremo tra poco, i risultati non cambiano molto dall'idealità. Questo probabilmente perchè la struttura è abbastanza ben realizzata da impedire l'insorgere di sforzi di taglio e momenti parassiti. La massa che costituisce il carico è pari a due chilogrammi e, quindi, nell'analisi piana consideriamo la froza di modulo 9.80 N.

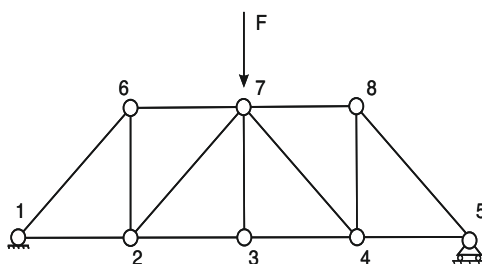


Figura 32: Trave di Howe

Attraverso il metodo dei nodi si previene ai seguenti risultati (le aste 5,8, 7,8 e 4,7 sono tirate, mentre le aste 4,5, 4,8 e 3,4 sono compresse e la 3,7 è scarica):

Trave	Forza normale in modulo (N)
7,8	4.90
5,8	6.93
4,5	4.90
4,8	4.90
4,7	6.93
3,4	9.80

Tabella 12: Trave di Howe: sollecitazioni calcolate con il metodo dei nodi

Passiamo ora al caso tridimensionale. Dapprima si misurano le aste scariche, poi si passa al caso in cui applichiamo il carico agganciandolo all'asta di collegamento del nodo, infine si procede con l'appoggio del peso sul nodo stesso. Il tutto è documentato dai grafici che tengono conto delle variazioni di carico nel tempo.

Per l'analisi della struttura, data la sua simmetria, basterà studiare solo la parte destra. Attraverso le celle di carico si ottengono allora i seguenti risultati:

Trave	Scarica (N)	Carico asta (N)	Carico nodo (N)
7,8	0.00	4.43	8.66
5,8	0.00	6.72	12.81
4,5	0.00	-4.70	-8.98
4,8	0.00	-4.59	-8.75
4,7	0.00	6.51	12.21
3,4	0.00	-9.84	-18.50
3,7	0.00	0.00	0.45

Tabella 13: Trave di Howe: sollecitazioni interne ottenute dagli esperimenti

Le aste sono state misurate a due a due data la presenza di sole due celle di carico. Come già detto è normale che il grafico non presenti valori costanti a causa delle oscillazioni del carico e della struttura stessa. Di seguito si riportano i grafici ottenuti:



Figura 33: Trave di Howe: aste 3,4 e 7,4

I precedenti grafici mostrano che la trave 3,4 è in trazione, mentre la trave 4,7 è compressa.

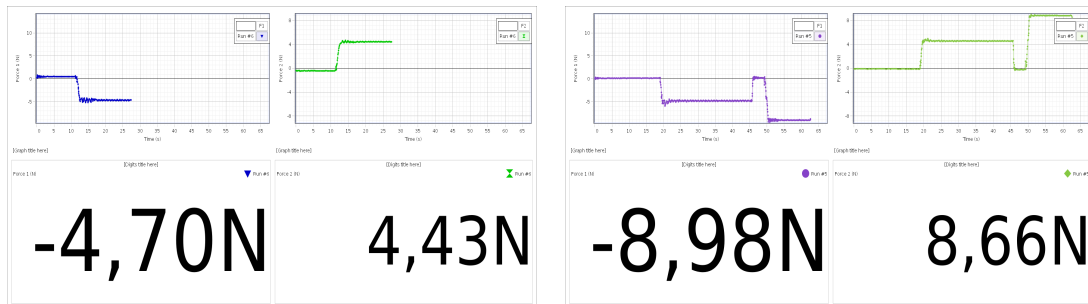


Figura 34: trave di Howe: aste 4,5 e 7,8

Da cui si vede che l'asta 4,5 è in trazione mentre la 7,8 è in compressione.

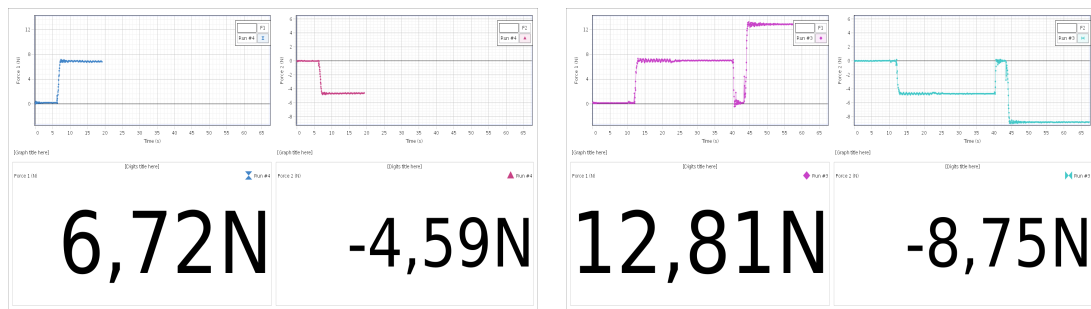


Figura 35: Trave di Howe: aste 5,8 e 4,8

Dove l'asta 5,8 è in compressione e la 4,8 è invece tirata.

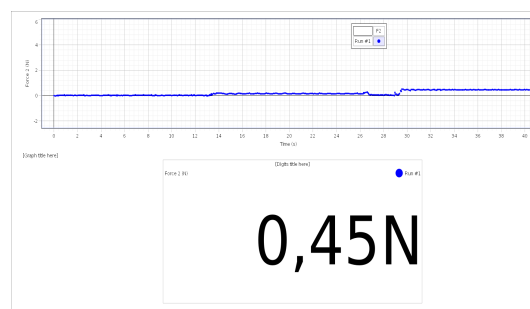


Figura 36: Trave di Howe: asta 3,7

Infine abbiamo l'asta 3,7 che risulta scarica qualsiasi sia il carico applicato. I risultati ottenuti, se confrontati con quelli ricavati dal metodo dei nodi, conferiscono valori accettabili. In particolar modo quelli relativi al carico agganciato sull'asta di collegamento. I risultati ottenuti invece nel caso in cui il peso agisce direttamente sul nodo dovrebbero restituire valori che sono il doppio di quelli calcolati con il metodo dei nodi, cosa che non accade. Infatti nel primo caso i valori rilevati si distaccano di pochi decimi di Newton da quelli teorici, mentre nel secondo abbiamo differenze anche di più di un Newton.

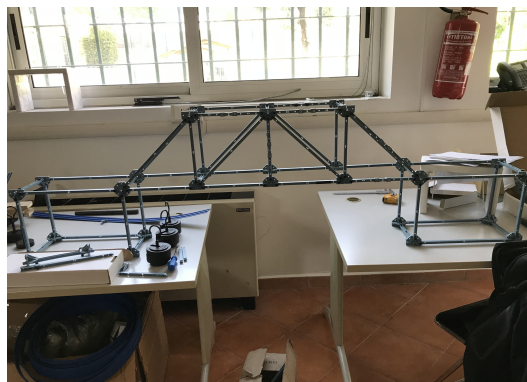


Figura 37: Modellino della trave di Howe

Trave di Pratt

Studiamo ora la trave di Pratt che, per costruzione, si avvicina molto alla trave di Howe. L'unica differenza sta nelle aste diagonali che collegano i nodi 7-2 e 7-4 che ora collegano i nodi 6-3 e 8-3. Si ha sempre la presenza di un carico \vec{F} diretto verso il basso in corrispondenza del nodo 7, derivata dalla presenza di una massa di due chilogrammi che, nel caso bidimensionale, conferisce alla forza un modulo di 9.80 N.

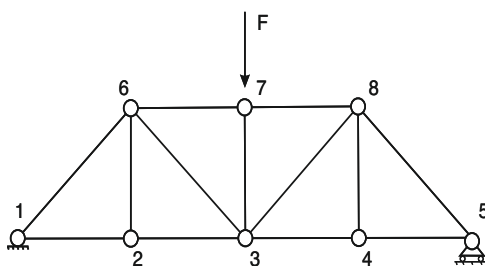


Figura 38: Trave di Pratt

Innanzitutto calcoliamo gli sforzi attraverso il metodo dei nodi (le aste 7,8, 5,8 e 3,7 che sono tiranti, le aste 4,5, 3,8 e 3,4 che sono puntoni e l'asta 4,8 che risulta scarica). Otteniamo:

Trave	Forza normale in modulo (N)
7,8	9.80
5,8	6.93
4,5	4.90
3,8	6.93
3,4	4.90
3,7	9.80

Tabella 14: Trave di Pratt: sollecitazioni calcolate con il metodo dei nodi

Analizziamo ora il caso reale, ovvero quello tridimensionale che ci si presenta con la struttura in foto (Figura 43). Consideriamo due casi, uno in cui una massa di due chilogrammi è agganciata nella mezzeria dell'asta di collegamento del nodo 7 con il suo speculare, ed uno in cui la massa è appoggiata direttamente sul nodo 7. Nel primo caso la forza \vec{F} assumerà un valore, in modulo, di 9.80 N, mentre nel secondo sarà pari a 19.60 N. Anche questa struttura è stata studiata nella condizione in cui è collegata a dei supporti verticali, direttamente ai vertici in alto di questi ultimi. Le misurazioni ci fanno prevenire ai seguenti risultati:

Trave	Scarica (N)	Carico asta (N)	Carico nodo (N)
7,8	0.00	9.37	17.68
5,8	0.00	6.85	12.93
4,5	0.00	-5.27	-9.18
4,8	0.00	-0.12	-0.04
3,8	0.00	-6.03	-11.62
3,4	0.00	-5.31	-9.68
3,7	0.00	9.35	19.63

Tabella 15: Trave di Pratt: sollecitazioni interne ottenute dagli esperimenti

Questi sono stati rilevati attraverso i grafici prodotti dal programma PASCO CAPSTONE:

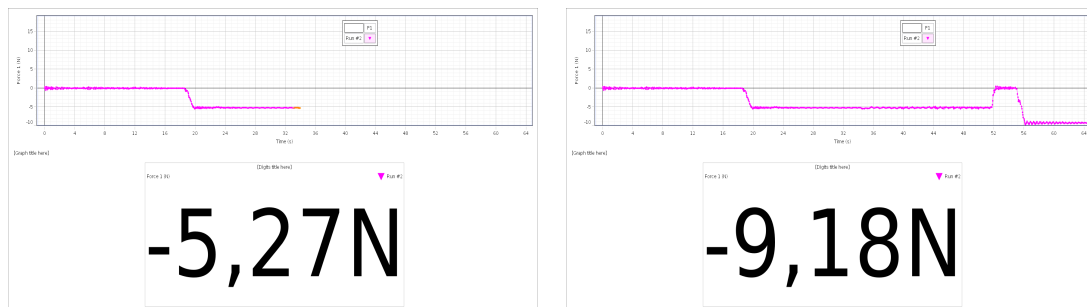


Figura 39: Trave di Pratt: asta 4,5

L'asta 4,5 risulta quindi in trazione.

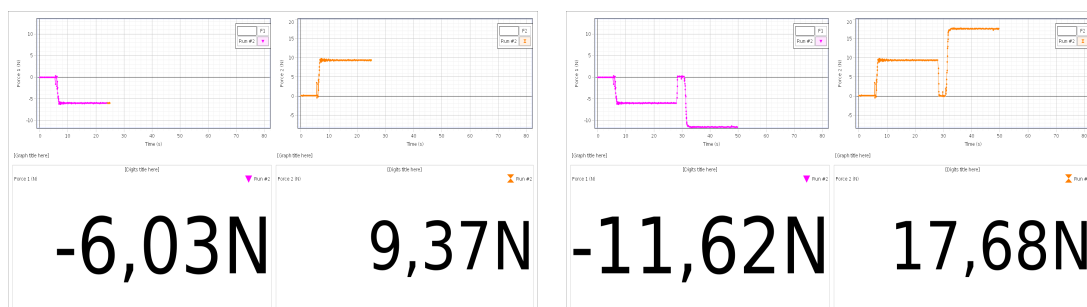


Figura 40: Trave di Pratt: aste 3,8 e 7,8

L'asta 3,8 risulta in trazione, mentre la 7,8 è compressa.

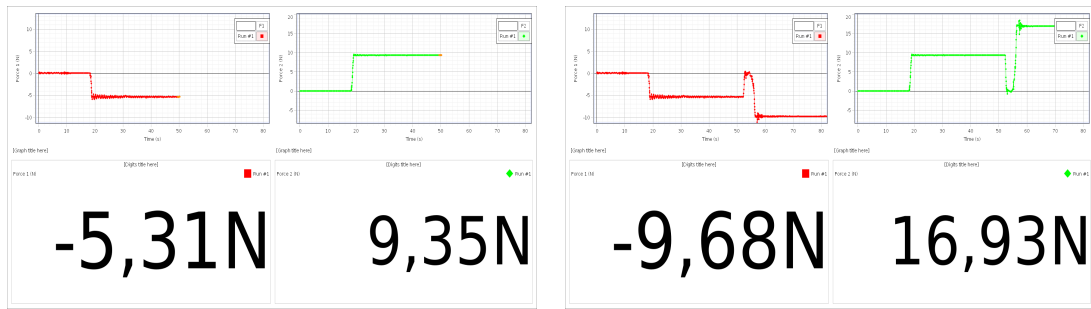


Figura 41: Trave di Pratt: aste 3,4 e 3,7

Quindi le aste 3,4 e 3,7, sono, rispettivamente, un tirante ed un puntone.

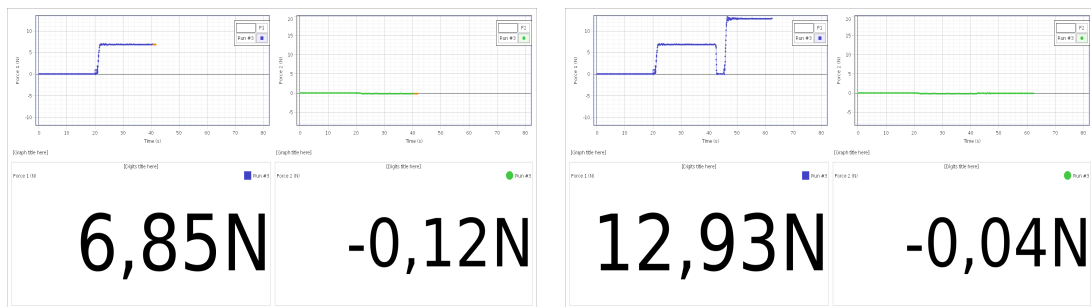


Figura 42: Trave di Pratt: 5,8 e 4,8

Da cui si vede che l'asta 5,8 è compressa e l'asta 4,8 è scarica. Anche in questo caso i risultati ottenuti sono accettabili e quelli che più si avvicinano al caso bidimensionale sono quelli ottenuti nel caso di carico collegato nella mezz'asta dell'asta.



Figura 43: Modellino della trave di Pratt

Travatura di Mohniè

La travatura di Mohniè è una struttura reticolare composta da dieci nodi e 17 aste. I vincoli esterni sono una cerniera ed un carrello, e l'unica forza esterna \vec{F} è applicata al nodo 8, verticalmente e verso il basso, come mostrato in Figura 44.

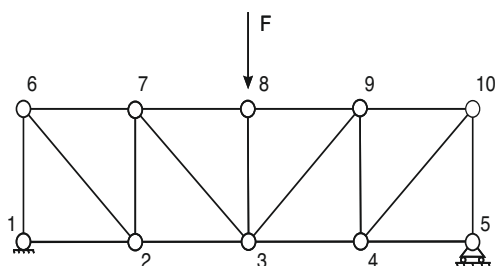


Figura 44: Travatura di Mohniè

Analizzando la struttura piana attraverso il metodo dei nodi, considerando il modulo della forza pari a 9.80 N, si previene ai risultati teorici per quanto riguarda le forze normali agenti su ogni trave. In particolare:

Trave	Forza normale in modulo (N)
3,9	6.93
8,9	9.80
3,4	4.90
3,8	9.80
4,9	4.90
9,10	4.90
5,10	4.90
4,10	6.93

Tabella 16: Travatura di Mohniè: sollecitazioni interne calcolate con il metodo dei nodi

Con le aste 3,9, 3,4 e 4,10 che risultano in trazione, le aste 8,9, 3,8, 4,9, 9,10 e 5,10 che sono compresse e l'asta 4,5 che risulta scarica. Ancora una volta, nella realtà dei fatti, è difficile rendere tale struttura isostatica con gli strumenti messi a disposizione. Tutti i vincoli esterni e le cerniere interne sono allora approssimati con incastri. Di nuovo analizziamo due possibili applicazioni del carico: sull'asta che collega i nodi dove deve essere applicata la forza e sul nodo direttamente. Considerando un peso di circa due chilogrammi, avremmo nel primo caso una forza $F = 9.80$ N e nel secondo $F = 19.60$ N. Dai grafici generati dal programma si ottengono i seguenti risultati:

Trave	Scarica (N)	Carico asta (N)	Carico nodo (N)
3,9	0.00	-7.09	-12.91
8,9	0.00	9.76	17.91
3,4	0.00	-4.85	-8.22
4,5	0.00	1.19	1.98
3,8	0.00	10.04	18.50
4,9	0.00	5.28	9.41
9,10	0.00	4.89	8.26
5,10	0.00	5.20	9.01
4,10	0.00	-7.07	-11.86

Tabella 17: Travatura di Mohniè: sollecitazioni ottenute dagli esperimenti

Di seguito vengono riportati i grafici ottenuti dal programma:



Figura 45: Travatura di Mohniè: aste 3,9, 8,9 e 3,4

Da cui si vede che le aste 3,9, 8,9 e 3,4 sono rispettivamente un tirante, un puntone e un tirante.

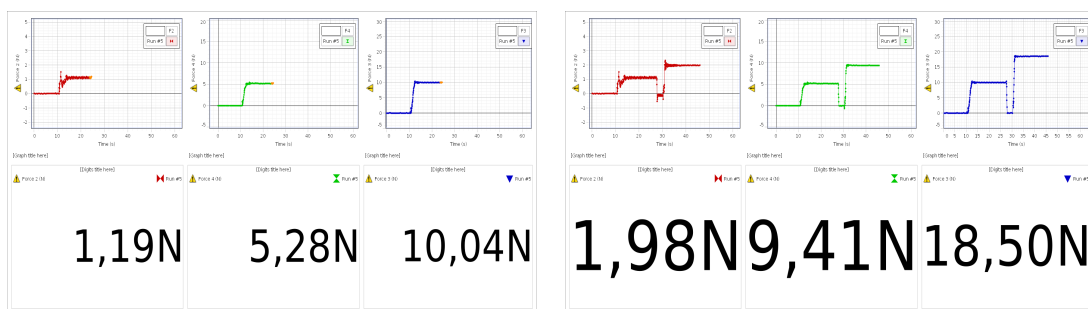


Figura 46: Travatura di Mohniè: aste 4,5, 4,9 e 3,8

Da cui si vede che le aste 4,5, 4,9 e 3,8 sono rispettivamente scarica, un puntone e un puntone.

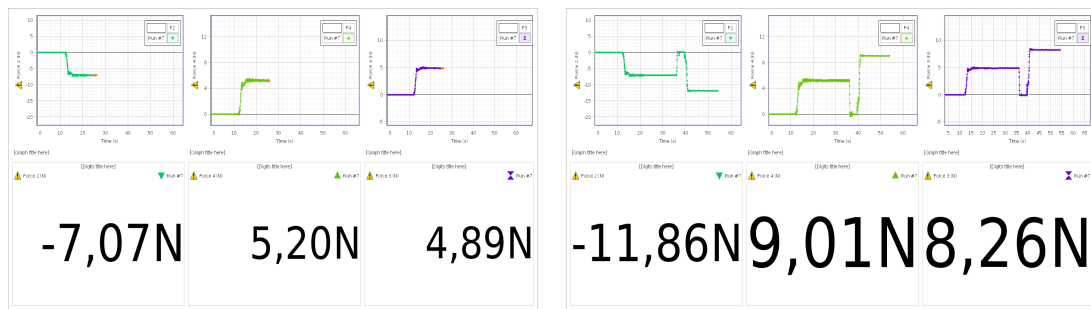


Figura 47: Travatura di Mohniè: aste 4,10, 5,10 e 9,10

Da cui si vede che le aste 4,10, 5,10 e 9,10 sono rispettivamente un tirante, un puntone e un puntone.

Confrontando i risultati con quelli ottenuti dal metodo dei nodi, si evince che il modello utilizzato è accettabile. Infatti i moduli delle forze di compressione e trazione, al limite, variano di pochi decimi di Newton dal caso ideale. Come detto nella premessa, le celle di carico sono notevolmente sensibili alle vibrazioni, ed il carico agganciato all'asta di collegamento tende, purtroppo, ad oscillare. Per questo, ad esempio per l'asta 4,5, non abbiamo sempre 0 N, ma un valore che oscilla attorno ad 1 N.



Figura 48: Modellino della trave di Mohniè

Conclusioni

Il fine ultimo di questo lavoro è quello di vedere quanto effettivamente varino le sollecitazioni interne ad una struttura nel caso in cui questa venga realizzata con tutti incastri interni ed esterni, rispetto a quelli che sono i risultati ottenuti attraverso il metodo dei nodi. Partendo da questo, si vuole capire se e come realizzare modellini che approssimino tali risultati e vedere se gli strumenti messi a disposizione siano adeguati alla realizzazione di strutture reticolari, in modo tale da dare un'impronta teorica su un eventuale costruzione reale.

Con gli strumenti messi a disposizione si sono potute realizzare solamente strutture tridimensionali più volte iperstatiche, dove l'iperstaticità è data da nodi corrispondenti ad incastri veri e propri. Le aste non avevano possibilità di movimento all'interno della struttura in nessuna direzione. Questo, effettivamente, è proprio quello che accade quando si produce una struttura di questo genere nella realtà dei fatti. Potremmo dire allora che quanto realizzato può essere studiato con lo stesso punto di vista di quanto analizzato nella teoria piana di tali strutture? Per rispondere a questa domanda facciamo riferimento ai diversi modellini qui proposti e ai mezzi con i quali sono stati studiati. Inizialmente ogni misurazione è stata fatta con la struttura in esame poggiata interamente su di un piano, con un peso di forma cilindrica poggiato direttamente su di un nodo. In questo modo abbiamo ottenuto risultati enormemente diversi da quelli visibili con il metodo dei nodi. È chiaro come ogni nodo a contatto con un piano di appoggio generi una reazione vincolare in risposta al carico, la quale influenza interamente le sollecitazioni interne. Per far sì che, per ogni struttura, i vincoli che generano reazioni siano solo due, dobbiamo collegarla a supporti verticali che la tengano sospesa. Si sono studiati allora due possibili casi di connessione con tali supporti, uno realizzato con un'asta di collegamento nodo-supporto e uno in cui il nodo corrispondesse direttamente ad un vertice del supporto stesso. Con l'applicazione di questi due casi alla maglia triangolare e alla Capriata all'italiana è risultato evidente come il secondo caso fosse quello che più si avvicinava ai risultati desiderati. Come ultimo punto, forse quello più importante, quello di capire come applicare il carico in modo da vedere la vera efficienza della struttura. Questo infatti viene posto nella mezz'asta di collegamento di un nodo con il suo corrispettivo, ovviamente per quei nodi dove agisce la forza \vec{F} nelle figure piane e direttamente sul nodo stesso, dove il cilindro è a contatto con il nodo attraverso la sua base. Quest'ultimo caso fa nascere sollecitazioni di moduli discostanti da quelli ipotizzati di qualche unità per la maggior parte dei casi; mentre il primo caso si avvicina di molto a questi valori, se non per qualche decimo di Newton, un errore comunque accettabile. Dunque questo metodo di sperimentazione ci rivela che le strutture così realizzate approssimano molto bene le loro rispettive versioni bidimensionali isostatiche.

Gli esperimenti verranno integrati alle lezioni di teoria che svolgeranno gli studenti delle scuole liceali. Anche per questo motivo ho inserito diversi aspetti che possano riguardare dubbi dello studente o comunque interessarlo in diversi punti di vista. Un esempio su tutti è proprio quello di considerare il carico direttamente poggiato sul nodo della struttura invece che prendere in considerazione solamente il caso in cui il peso sia agganciato a metà dell'asta di collegamento. Questo per rispondere all'eventuale domanda di uno studente secondo il quale sarebbe lecito operare in conformità a quanto studiato

nella teoria, dove il disegno presenta un vettore diretto verso il basso in corrispondenza del nodo interessato. Attraverso il confronto dei risultati è presto dimostrato l'errore nell'adottare un approccio simile. Un altro esempio che riguarda proprio questo aspetto è quello relativo alla scelta di utilizzare supporti verticali.

Il tutto è stato svolto con l'intenzione di fornire una guida a chi, in futuro, decida di cimentarsi con gli stessi strumenti e con l'intenzione di affiancare il lavoro alla formazione di ragazzi che provengono dalle scuole superiori, con la speranza di motivarli e di avvicinarli al mondo dell'ingegneria.

Alcuni utilizzi delle strutture presentate

Queste sono alcune applicazioni delle strutture presentate, prese da un estratto della Tesi di Davide Renzi.

- **La Capriata:** struttura reticolare usata come elemento portante dei tetti. Essa può essere costruita in legno o ferro ed ha la caratteristica positiva di trasmettere solo carichi ai muri della struttura che la sostiene grazie alla presenza di una trave posta in orizzontale, la quale viene chiamata catena. La capriata è composta fondamentalmente da tre travi, le due superiori inclinate secondo le falde del tetto, che sono dei puntoni, e la catena che le collega nella parte bassa, formando il caratteristico triangolo con le travi inclinate. La catena è un tirante, infatti assorbe le spinte che altrimenti si riverserebbero sui muri laterali della costruzione. Le capriate sono utili per la copertura di tetti con grandi luci (larghezza tetto), anche per estensioni maggiori di dodici metri. Aumentando la luce è necessario aumentare le dimensioni delle travi che compongono la capriata. Fino a cinque metri di luce è sufficiente la capriata precedentemente descritta, dai cinque ai sette metri la catena si inflette sotto il suo peso, quindi è necessario inserire un elemento verticale chiamato Monaco che la sostiene (Figura 49). Il Monaco annulla l'inarcamento che subisce con il tempo la catena ed è collegato ad essa mediante una staffa. Come la catena, anche il Monaco è teso. Se la luce del tetto arriva fino ai dodici metri, anche le travi inclinate saranno soggette ad un inarcamento, conseguentemente per avere sostegno vengono posizionati i Sættoni (Figura 49). I Sættoni sono elementi compressi, quindi puntoni, come le travi oblique. La Capriata con monaco e Sættoni è detta Capriata all'italiana. Per sostenere un tetto si inseriscono più capriate, solitamente una ogni tre/sette metri.
- **Trave di Mohniè:** le aste superiori e inferiori collocate orizzontalmente vengono chiamate correnti, le verticali montanti. Ha le aste diagonali tutte tese come caratteristica peculiare. È simmetrica rispetto alla retta verticale che passa in mezzeria. Tale retta è di simmetria anche per le forze esterne. Ha come vincoli esterni una cerniera ed un carrello in modo da essere isostatica ed avere la reazione vincolare in A uguale a quella in B (Figura 50).
- **Trave di Howe:** i correnti superiori e inferiori sempre posti orizzontalmente e paralleli tra loro, le aste diagonali sono, in questo caso, tutte compresse, e i montanti

sono tesi. Gli viene spesso preferita la trave di Mohniè a causa della compressione delle aste diagonali (Figura 51).

- **Trave di Pratt:** anche tale travatura ha i correnti orizzontali, paralleli tra loro e rettilinei. Rispetto alle travi analizzate precedentemente è caratterizzata dall'alternanza di una diagonale tesa e una compressa. I montanti sono sempre verticali (Figura 52).

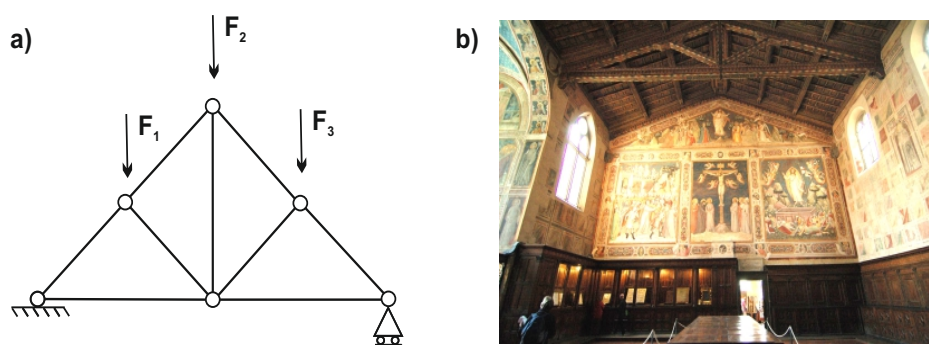


Figura 49: Capriata all'italiana: a) modello; b) esempio di utilizzo nel sostegno del tetto della sacrestia nella Chiesa di Santa Croce in Firenze. Foto tratta dal sito ufficiale del portale Flickr

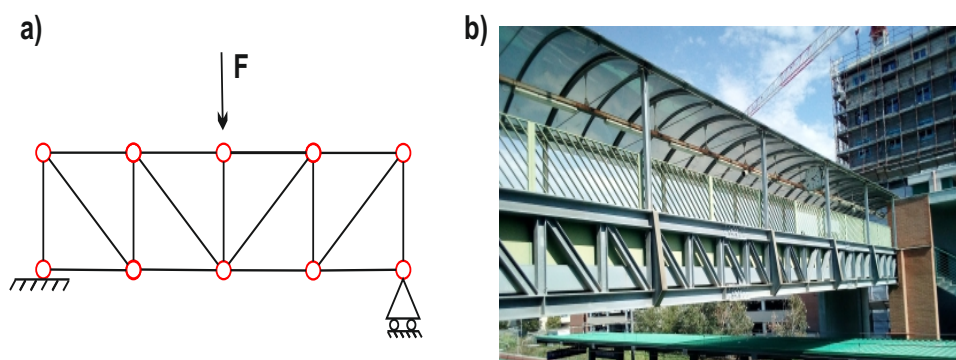


Figura 50: Trave di Mohniè: a) modello; b) esempio di utilizzo nel sovrappeso ferroviario di Parco Leonardo in Fiumicino

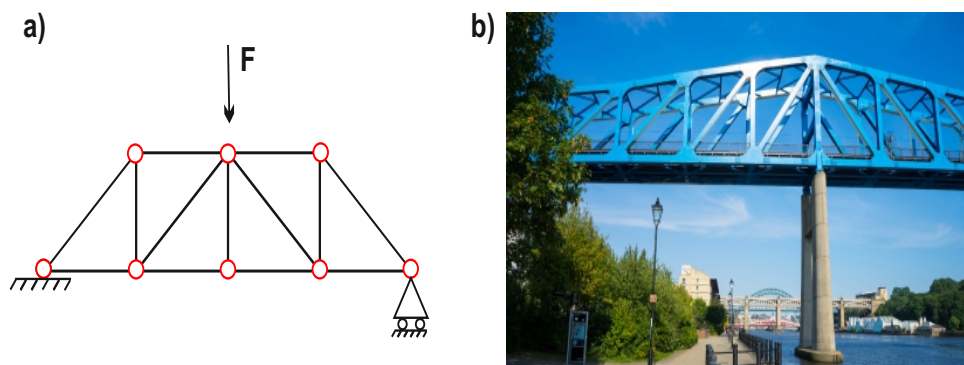


Figura 51: Trave di Howe: a) modello; b) esempio nel Ponte Queen Elizabeth 2 in Dartford nel regno Unito. Foto tratta dal sito ufficiale del portale iStock

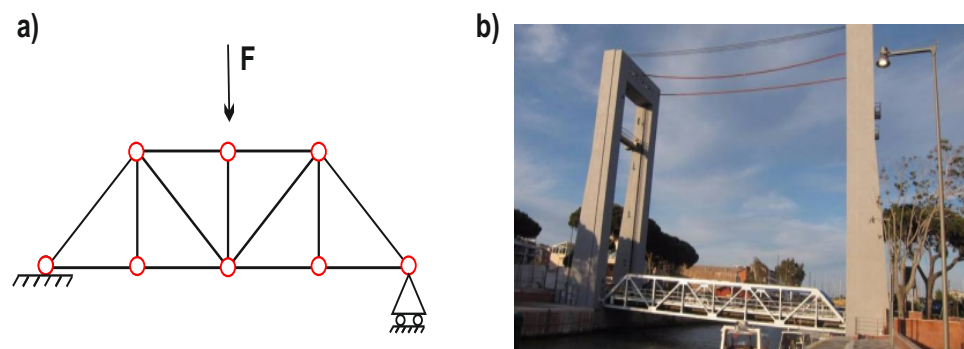


Figura 52: Trave di Pratt: a) modello; b) esempio di utilizzo nel Ponte 2 Giugno in Fiumicino. Foto tratta dal sito de: "Il Faro online"

Bibliografia

- [1] Paolo Casini, Marcello Vasta (2016), *Scienza delle costruzioni*, Città Studi Edizioni.
- [2] Steen Krenk, Jan Hogsberg, *Statics and Mechanics of Structures*, Springer.
- [3] Link al download del programma PASCO Capstone, <https://www.pasco.com/prodMulti/pasco-capstone-software/index.cfm>